

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Beweis. (1) ist trivial, da $\sum \frac{x^n}{n!}$ für alle x konvergiert.

5/3/20

(2). Übungsaufgabe!

(3). Es ist $\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \implies$
 $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \implies$
 $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$

hieraus folgt insbesondere $\exp(x) \neq 0$. Für $x > 0$ ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1.$$

Für $x < 0$ ist $-x > 0$, also $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$, denn $\exp(-x) > 1$.

(4). Es sei $x_1 < x_2$; z.z.: $\exp(x_1) < \exp(x_2)$.

Wegen $x_1 < x_2$ gibt es ein $h > 0$, so daß $x_1 + h = x_2$. Folglich ist

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + h) = \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x_1).$$

(5). Es ist

$$\exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = (\exp(1))^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$1 + \frac{1}{n} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = (\exp(1))^{\frac{1}{n}}.$$

Weiterhin gilt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} (\exp(1))^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) &< \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\text{denn } \frac{1}{k!} < 1 \text{ für } k \geq 2) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} < (\exp(1))^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} &\implies \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \exp(1) < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n &\implies \\ e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1) \leq \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e &\implies \\ \exp(1) = e. & \end{aligned}$$

(6). 1. $x = 0 \implies$

$$\exp(0) = 1 = e^0 = (\exp(1))^0.$$

2. $x = m > 0 \implies$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1) \cdots \exp(1) = (\exp(1))^m.$$

3. $x = \frac{1}{n} \implies$

$$\exp(1) = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = (\exp(1))^{\frac{1}{n}}.$$

4. $x = \frac{m}{n} > 0 \implies$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left((\exp(1))^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\exp(1))^{\frac{m}{n}}.$$

5. $x = -\frac{m}{n} < 0 \implies$

$$\exp\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{\left(\exp(1)\right)^{\frac{m}{n}}} = \left(\exp(1)\right)^{-\frac{m}{n}}.$$

(7). Wir zeigen zunächst, daß $\exp(x)$ in $a = 0$ stetig ist. Hierzu benutzen wir das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. Satz 4.24).

Wenn $x_i \neq 0$ und $x_i \rightarrow 0$, so $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{:= c_n} (x_i - 0)^n \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c_0 = \frac{1}{0!} = 1$.

Also $\exp(x_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \exp(0) = 1$.

Sei jetzt $a \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_n \in \mathbb{R}$ und $x_n \rightarrow a$.

z.z.: $\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a)$.

g.z.z.: $\exp(x_n) - \exp(a) \longrightarrow 0$

$$\exp(x_n) - \exp(a) = \exp(a) \cdot \left(\underbrace{\exp(x_n - a)}_{\rightarrow 0} - 1 \right) \longrightarrow 0 \implies$$

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a),$$

also ist \exp in a stetig. \square