

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.12 Für e^x gilt:

5/3/24

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- (2) e^x nimmt jeden Wert $y > 0$ genau einmal an
($\implies W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$).

Beweis. (1). Für $x > 0$ ist $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x) = \infty$.

5/3/25

Für $x < 0$ ist $-x > 0$ und somit $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, denn $e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

(2). Sei $y > 0$ beliebig.

Aufgrund der Eigenschaft (1) gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $e^a < y < e^b$. Da die Funktion e^x in \mathbb{R} stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz den Wert y an. Andererseits kann y auch nur einmal angenommen werden, denn e^x ist nach Satz 5.11 (4) streng monoton wachsend. \square