Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.13 ln *hat folgende Eigenschaften*: **5/3/29**

(1) $\ln \mathrm{e} = 1$, $\ln \mathrm{e}^x = x$ *und* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

(2) ln *ist stetig.*

(3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).

(4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ *ist* $\ln x < 0$, *und für* $1 < x$ *ist* $0 < \ln x$.

(5) ln *ist streng monoton wachsend.*

(6) *Für rationale* r *und reelle* $x > 0$ *gilt*: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus den Eigenschaften von e^x. **5/3/30**
Als Beispiel zeigen wir (3).

Annahme: $\ln(x \cdot y) \neq \ln x + \ln y$.

Aus der Injektivität von e^x folgt dann

$$x \cdot y = \mathrm{e}^{\ln(x\cdot y)} \neq \mathrm{e}^{\ln x + \ln y} = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln x}}_{=x} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\ln y}}_{=y} = x \cdot y \quad \lightning \qquad \square$$