Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.16 sin *und* cos *haben folgende Eigenschaften*: **5/3/47**

(1) sin *und* cos *sind in* $\mathbb{R}$ *definiert,* $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

(2) sin *ist ungerade und* cos *ist gerade.*

(3) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (\Longrightarrow \ \sin 2x = 2 \sin x \cos x)$.

(4) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (\Longrightarrow \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$.

(5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.

(6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.

(7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\Longrightarrow \ |\sin x|, |\cos x| \leq 1)$.

(8) sin *und* cos *sind stetig.*

Beweis. (1) ist nach Definition trivial. **5/3/48**

(2) folgt unmittelbar aus der Definition von sin und cos .

(3) und (4) zeigt man mit Hilfe des Cauchyprodukts der entsprechenden Reihen (vgl. Übungsaufgaben).

(5) und (6) folgen aus (3) und (4), indem man auf der linken Seite von (5) bzw. (6) jeweils x, y in der Form $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ und $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ schreibt.

(7). Nach (1) ist $\cos 0 = 1$; folglich erhält man mit Hilfe von (4):

$$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Damit gilt auch

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \ \text{ und } \ 0 \leq \sin^2 x \leq 1,$$

und schließlich

$$|\sin x| \leq 1, \ |\cos x| \leq 1.$$

(8). sin und cos sind durch Potenzreihen definiert, diese sind in $x = 0$ stetig (vgl. Beweis zu Satz 5.11 (7)). Also gilt:

Wenn $x \to 0$, so $\sin x \to \sin 0 = 0$ und $\cos x \to \cos 0 = 1$.

Wir beweisen jetzt die Stetigkeit von sin an einer beliebigen Stelle $a \neq 0$.
g.z.z.: Wenn $x \to a$, so $\sin x \to \sin a$, d.h., $\sin x - \sin a \longrightarrow 0$.

Es sei $x \to a$. Nach (5) gilt:

$$\sin x - \sin a = 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}.$$

Wegen $x \to a \iff \frac{x-a}{2} \to 0$ erhält man

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \cdot \underbrace{\left|\cos \frac{x+a}{2}\right|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\left|\sin \frac{x-a}{2}\right|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$

Für $\cos$ ergibt sich mit Hilfe von (6) die analoge Behauptung. ❏