Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Beweis. Es ist **5/3/50**

$$\begin{aligned}\cos 2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!} \\ &= \underbrace{1 - 2 + \frac{4^2}{4!}}_{=-\frac{1}{3}<1} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!}}_{(\star)} .\end{aligned}$$

$(\star)$ ist eine alternierende Reihe; das erste Glied (für $n = 3$) ist negativ und $\left(\frac{4^n}{(2n)!}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist die Reihe konvergent, und ihr Wert (vgl. Beweis des Leibniz-Kriteriums) ist negativ. Insgesamt gilt damit $\cos 2 < 0$. ❏