Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 5.19 (*Majorantenkriterium für Funktionenreihen*) **5/4/5**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) *eine Folge von Funktionen, die alle in* M *definiert sind, und es seien* c_n *reelle Zahlen.*

Ist $|f_n(x)| \leq c_n$ *für fast alle* n *und alle* $x \in M$, *und ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergent, dann ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmäßig und absolut konvergent in* M.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums.) **5/4/6**

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\Big|\sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x)\Big| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i < \varepsilon$$

für hinreichend große n. Folglich ist die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Die absolute Konvergenz erhält man sofort aus dem Majorantenkriterium für Reihen mit konstanten Gliedern. ❏