

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 5.21 (*Stetigkeit der Grenzfunktion*)

5/4/10

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine in M definierte Funktionenfolge, und alle f_n seien in a bzw. in ganz M stetig.

- (1) Konvergiert (f_n) in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.
- (2) Konvergiert $\sum f_n$ in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.

Beweis. (1). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in M$ gilt: 5/4/11

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert ein $\delta_n > 0$, so daß für jedes $x \in M$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_n, \text{ so } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $|x - a| < \delta_n$ und $n \geq n_0$ erhält man daraus:

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{:= (\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{:= (\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{:= (\star\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

$((\star), (\star\star\star)) < \frac{\varepsilon}{3}$ folgen aus der gleichmäßigen Konvergenz und $(\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}$ aus der Stetigkeit der f_n .

(2) folgt sofort aus (1), denn mit f_0, \dots, f_n ist auch $F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ stetig. \square