Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Bemerkung. **5/4/14**

Aus dem letzten Satz und dem zugehörigen Korollar erhält man weiterhin:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x).$

(Vertauschbarkeit zweier Limites bei gleichmäßig konvergenten Folgen)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

(Vertauschbarkeit des Limes mit der unendlichen Summe bei gleichmäßig konvergenten Reihen)

(3) Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig.

(4) Das Beispiel 5/4/7 zeigt, daß Funktionenreihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n\cdot\sin(nx) + b_n\cdot\cos(nx)\Big)$$

stetige Funktionen definieren, wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren. Hieraus ergeben sich interessante und wichtige Möglichkeiten für die Darstellung weiterer nichtelementarer Funktionen. Hiermit befaßt sich die Theorie der *Fourierreihen*, die wir jedoch nicht behandeln werden (siehe Literaturangabe [4], Teil II, Seite 109 – 116 oder [1], Teil 2, Seite 118 – 173).