Kapitel 5
Reelle Funktionen

Funktionen sind von grundlegender Bedeutung für fast alle Gebiete der Wissenschaft; **5/0**
sie geben Zusammenhänge zwischen abhängigen veränderlichen Größen an, wie z.B.

- die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit (an einem fixierten Ort),
- den Druck eines Gases in Abhängigkeit von der Temperatur,
- die Geschwindigkeit eines Massepunktes in Abhängigkeit von der Beschleunigung.

Der allgemeine Funktionsbegriff wurde bereits im ersten Kapitel definiert. Danach sind Funktionen zweistellige Relationen (also Mengen von Paaren), die an der zweiten Stelle eindeutig sind.

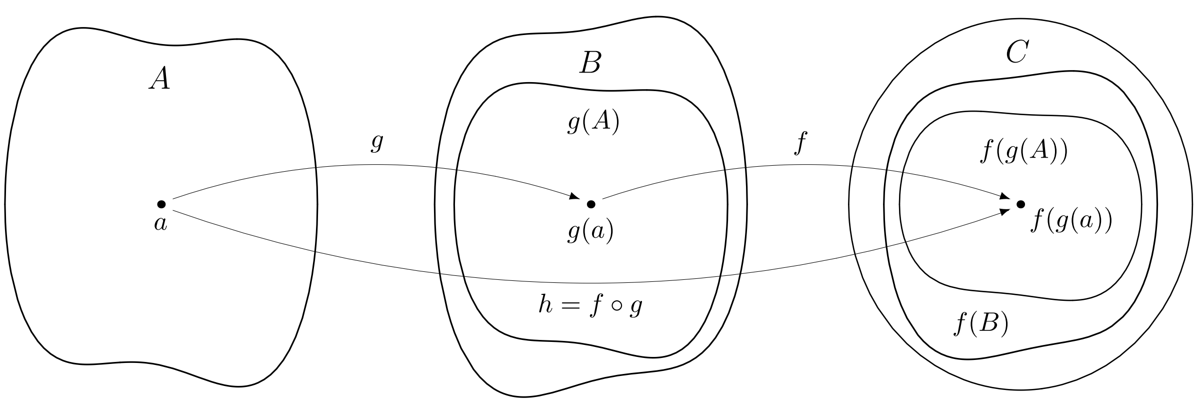
5.1 Operationen für Funktionen

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von Operationen für Funktionen behandelt, die **5/1/0**
aber zum Teil nur in Strukturen (in Körpern, Vektorräumen, …) ausgeführt werden können.
Zunächst betrachten wir aber zwei wichtige Operationen für Funktionen, die keine Struktur voraussetzen (sondern nur auf Mengen definiert sind), nämlich die Verkettung und die Inversenbildung (falls existent), ehe wir uns den reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen zuwenden.

Definition. (*Verkettung von Funktionen*) **5/1/1**

Es seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ Funktionen, so daß $W(g) = g(A) \subseteq D(f)$. Die Funktion $h : A \to C$ heißt *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung* von f und g $\underset{\text{Df}}{=}$ $h = \{(a,c) : (a,c) \in A \times C$ und es gibt ein $b \in B$, so daß $(a,b) \in f$ und $(b,c) \in g\}$.

Bez.: $h = f \circ g$, (d.h., für jedes $x \in D(g)$ ist $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$).



5/1/2

Abb. 5.1 Verkettung von f und g

Definition. (*inverse Funktion*) **5/1/3**

Es sei f injektiv.
g ist *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* von f
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ $(a,b) \in g$ gdw $(b,a) \in f$, (d.h., $g(a) = b \iff f(b) = a$.)

Bez.: $g = f^{-1}$.

5/1/4

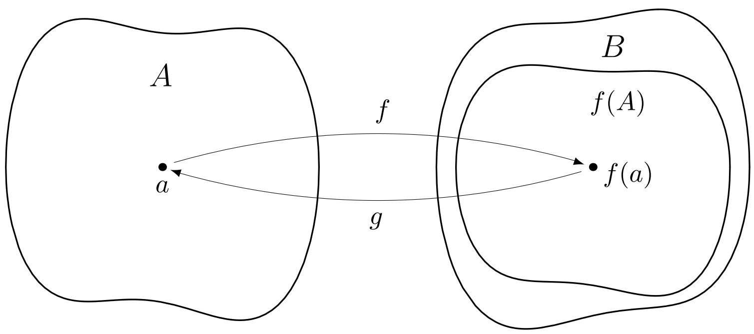


Abb. 5.2 Bildung der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ mit $g : f(A) \to A$

Folgerungen. 5/1/5

1. Offensichtlich lassen sich Umkehrfunktionen **nur von injektiven Funktionen** definieren, da sonst die Eindeutigkeit an der zweiten Stelle verletzt ist.
2. Es ist stets $D(g) = W(f)$ und $W(g) = D(f)$.
3. g ist invers zu $f \iff f$ ist invers zu g.
4. Für alle $x \in D(f)$ und alle $y \in D(f^{-1})$ gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$, also $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$ (wobei I die *Identitätsfunktion* ist, d.h., $I(x) = x$ für alle x).

Wir befassen uns jetzt mit reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. 5/1/6

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen* 5/1/7
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a,b) \in f$.

Bez.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Der *Graph* einer Funktion ist die geometrische Veranschaulichung der Funktion 5/1/8
(:= Menge von Paaren) in einem geeigneten Raum mit Koordinatensystem.

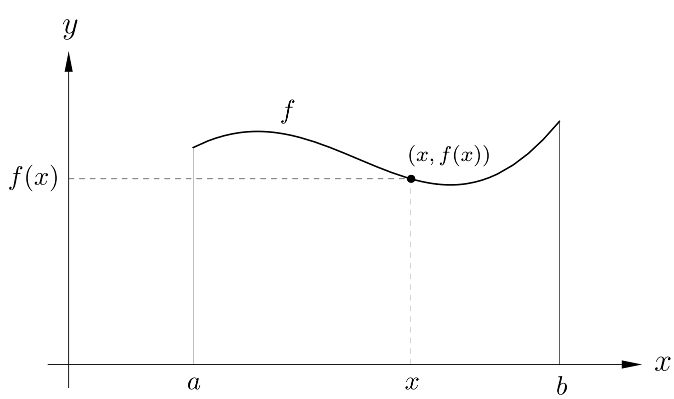


Abb. 5.3 Darstellung einer Funktion f im $\mathbb{R}^2$ mit rechtwinkligem Koordinatensystem

Beispiele.

Wir betrachten Funktionen $f,\, g,\, h \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **5/1/9/1**
Der Einfachheit wegen bezeichnen wir in Zukunft die Mengen $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\}$ auch mit $[a, \infty)$; analog benutzen wir die Bezeichnungen (a, ∞), $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$.

1. Sei $f(x) = x^2$ mit $A := D(f) = \mathbb{R} \implies W(f) = f(A) = [0, \infty)$ (vgl. Abb. 5.4).
2. Sei $g(x) = \sqrt{x}$ mit $A := D(g) = [0, \infty) \implies W(g) = g(A) = [0, \infty)$ **5/1/9/2** (vgl. Abb. 5.5).

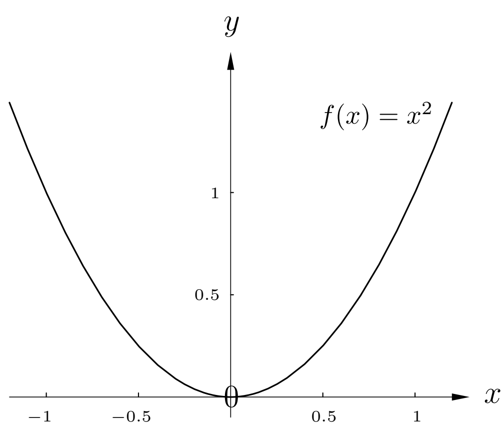


Abb. 5.4 – Parabel

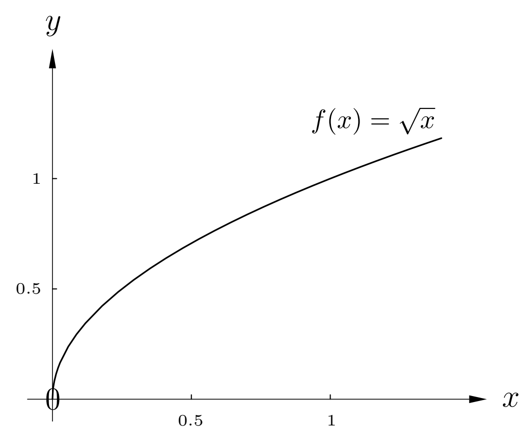


Abb. 5.5 – Wurzelfunktion

3. Offenbar ist die Funktion f im Beispiel 1 nicht injektiv. Schränkt man jedoch den **5/1/9/3** Definitionsbereich von f auf $[0, \infty)$ ein (so erhält man eigentlich eine andere Funktion, die wir aber weiterhin mit f bezeichnen werden), dann ist f injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Für $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$ ist

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Löst man die Gleichung $y = x^2 = f(x)$ nach x auf, so erhält man $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$, wobei $y \geq 0$.
Will man die Graphen der Funktionen f und f^{-1} mit Hilfe des gleichen (rechtwinkligen) Koordinatensystems veranschaulichen, dann muß man x und y in $y = x^2$ vertauschen und entsprechend nach y auflösen. Dadurch erhält man $y = \sqrt{x}$.
$f^{-1}(x)$ erweist sich dann als Spiegelung von $f(x)$ an der Geraden $y = x\ (= I(x)\,)$.

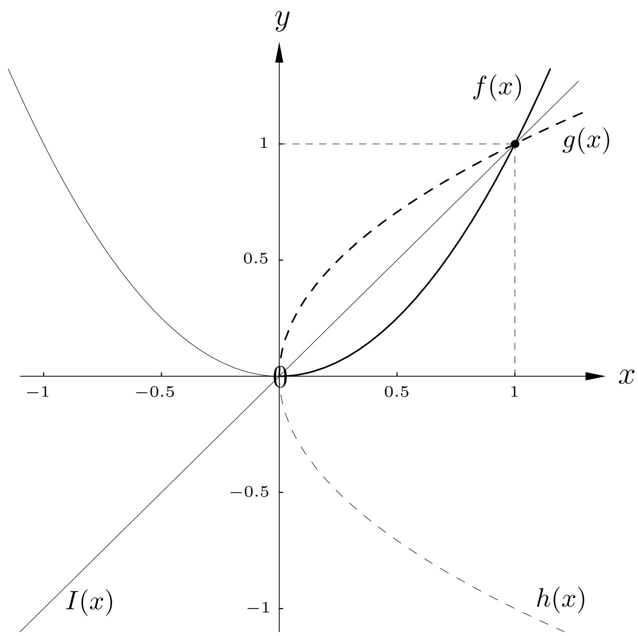


Abb. 5.6 Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ für $0 \le x$ (Graph dick durchgezogen) ist durch $g(x) = \sqrt{x}$ gegeben (Graph dick gestrichelt). Offenbar ist $f(x)$ auch für $x \le 0$ injektiv (Graph dünn durchgezogen); die entsprechende Umkehrfunktion ist durch $h(x) = -\sqrt{x}$ gekennzeichnet (Graph dünn gestrichelt). Funktionen und ihre Umkehrfunktionen sind jeweils an der Identitätsfunktion $I(x) = x$ gespiegelt.

Wir haben schon gesehen, daß nicht alle Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, sondern nur die injektiven. Wir betrachten jetzt eine wichtige Teilklasse von injektiven Funktionen, nämlich die streng monotonen. **5/1/10**

Definition. (*monoton, streng monoton*) **5/1/11**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \le x_2$, so $f(x_1) \le f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \ge f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Analog wie bei Folgen nennen wir (in M) monoton wachsende bzw. monoton fallende Funktionen gelegentlich auch kurz *monoton* in M. Ist f im gesamten Definitionsbereich monoton, dann heißt f monoton (ohne Angabe einer Menge). **5/1/12**

Satz 5.1 *Ist f streng monoton, dann besitzt f eine Umkehrfunktion.* **5/1/13**

Beweis. g.z.z.: f ist injektiv, d.h., wenn $x_1 \ne x_2$, so $f(x_1) \ne f(x_2)$. **5/1/14**
Wenn also $x_1 \ne x_2$, so $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$ $\implies$ $f(x_1) \lessgtr f(x_2)$ und damit $f(x_1) \ne f(x_2)$. ❑

Definition. (*rationale Operationen für Funktionen*) **5/1/15**

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Summe, Differenz, Produkt* und *Quotient* von f und g sind wie folgt definiert:

(1) $(f \pm g)(x) \underset{\text{Df}}{\equiv} f(x) \pm g(x)$ für alle $x \in D(f) \cap D(g)$.

(2) $(f \cdot g)(x) \underset{\text{Df}}{\equiv} f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in D(f) \cap D(g)$.

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \underset{\text{Df}}{\equiv} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D(f) \cap D(g)$ und $g(x) \neq 0$;

folglich ist $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.

Bemerkung. **5/1/16**

Summe, Differenz, Produkt und Quotient sind die *rationalen Operationen.*

5.2 Stetigkeit

Im folgenden betrachten wir eine besonders wichtige Klasse von Funktionen, nämlich **5/2/0**
die stetigen Funktionen.

Definition. (*Stetigkeit*) **5/2/1**

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε-Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ-Umgebung von a, so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

5/2/2

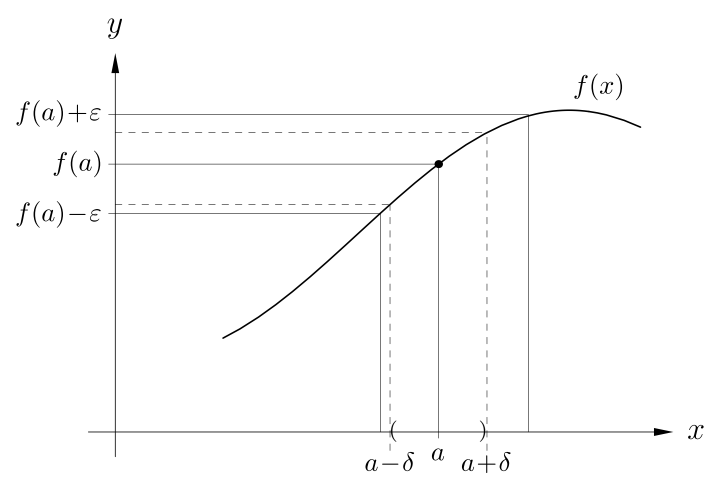


Abb. 5.7 Ist die Funktion f an der Stelle a stetig und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß durch f die δ-Umgebung von a in die zu $f(a)$ gehörende ε-Umgebung abgebildet wird, also $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$.
Offenbar leistet auch jedes kleinere $\delta > 0$ das Verlangte.

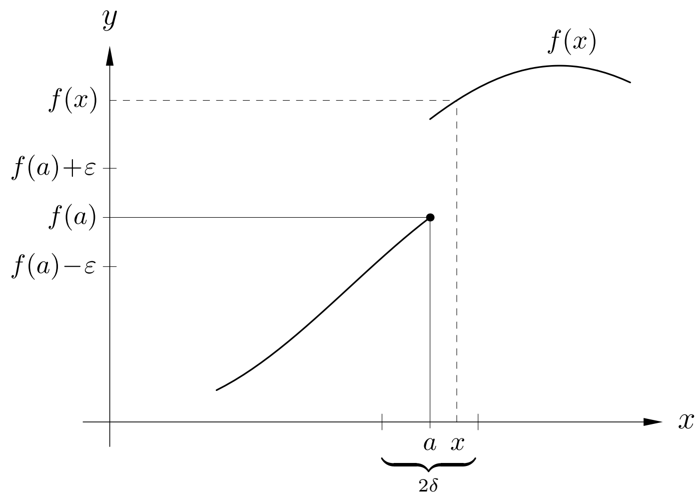


Abb. 5.8 Die Funktion f ist an der Stelle a nicht stetig. Denn ist $\varepsilon > 0$ wie in der Abbildung gegeben, dann existiert kein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(a)$ stets gilt: $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

Definition. (*stetig in einer Menge*) **5/2/3**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Beispiele.

1. $f(x) = c,\ \ D(f) = \mathbb{R}.$ (vgl. Abb. 5.9) **5/2/4/1**

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Konstante Funktionen sind also stetig.

2. $f(x) = x,\ \ D(f) = \mathbb{R},\ \ a \in \mathbb{R}.$ (vgl. Abb. 5.10) **5/2/4/2**

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

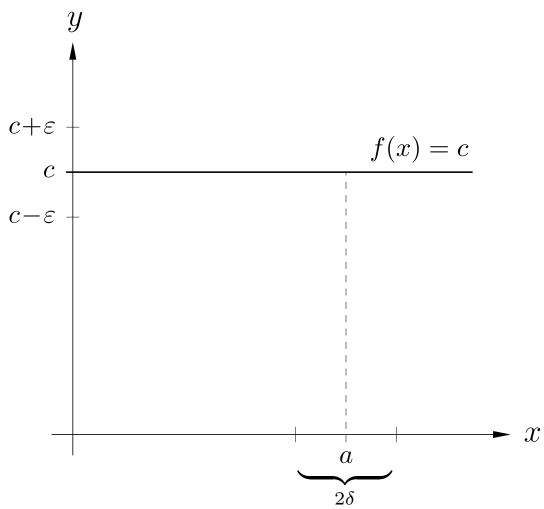


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

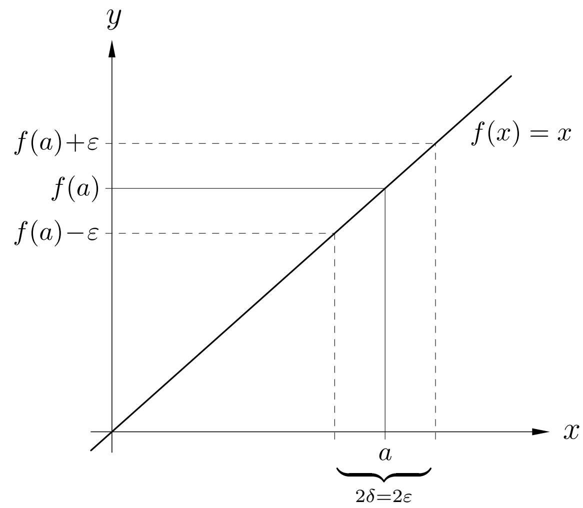


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion

3. Es sei $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. **5/2/4/3**
Um die Stetigkeit von $f(x)$ in a nachweisen zu können, haben wir (entsprechend der Definition) für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| := (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erste Näherung für δ: $0 < \delta \leq 1$.
Dann ist $|x + a| = |x - a + 2a| \leq \underbrace{|x - a|}_{<\delta \leq 1} + |2a| \leq 1 + |2a|$.

Folglich ist

$$|f(x) - f(a)| = (\star) \leq |x + a| \cdot |x - a| \leq (1 + |2a|) \cdot |x - a|.$$

Wählt man jetzt $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1 + |2a|}$, dann ist für $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist in $a = 1$ nicht stetig, da f an der Stelle a nicht definiert ist. **5/2/4/4**

5. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.11) **5/2/4/5**

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht stetig.
Stetigkeit in $a = 0$ formal ausgedrückt bedeutet:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f) \Big(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Big)$.
Folglich bedeutet Unstetigkeit an dieser Stelle:
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f) \Big(|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \Big)$.
Es sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig.
Ist $x \in U_\delta(0)$ mit $-\delta < x < 0$, dann ist $|f(x) - f(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \varepsilon = 1$.
Hieraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational}. \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.12) **5/2/4/6**

f ist in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig, denn in jeder δ-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ liegen rationale und irrationale Zahlen. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann liegt wenigstens ein Funktionswert $f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$ und x rational bzw. irrational außerhalb von $U_\varepsilon(f(a))$.

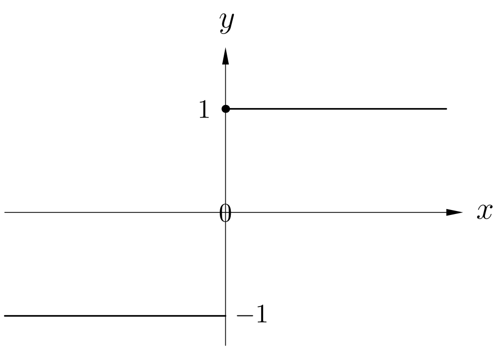


Abb. 5.11

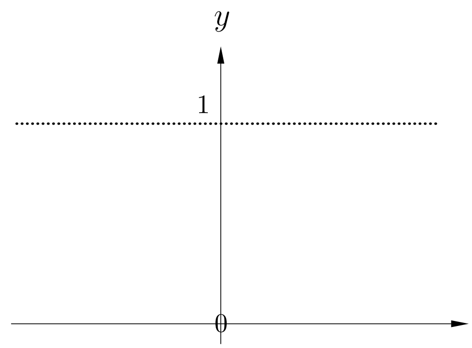


Abb. 5.12

Kriterien für die Stetigkeit **5/2/5**

Wir wollen jetzt die schon bekannten Eigenschaften über konvergente Folgen ausnutzen, um damit Ergebnisse über stetige Funktionen zu erzielen.

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*) **5/2/6**

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).
f besitzt an der Stelle a den *Grenzwert* c
$\overset{=}{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$

Definition. (*uneigentlicher Grenzwert*) **5/2/7**

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.
f hat an der Stelle a den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$)
$\overset{=}{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Bez.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$)

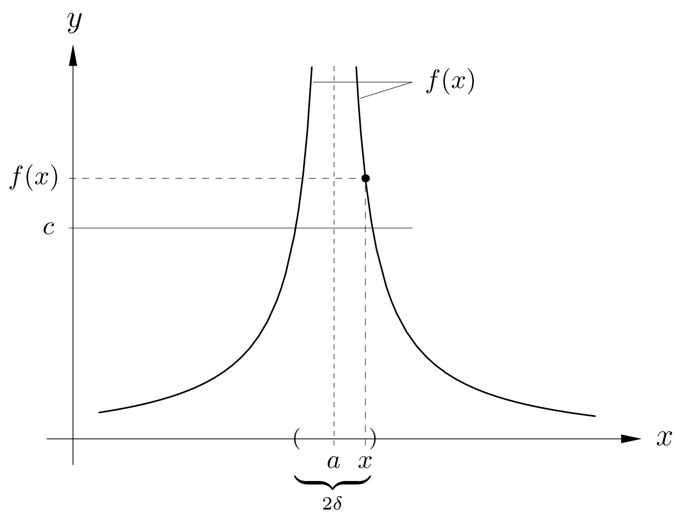


Abb. 5.13 Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(a)$ mit $x \neq a$ gilt: $f(x) > c$; folglich ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Analog ließe sich auch der Fall $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ demonstrieren. **5/2/8**

Definition. (*Grenzwert im Unendlichen*) **5/2/9**

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $D(f) = [a, \infty)$ (bzw. $D(f) = (-\infty, a]$).
f besitzt *für* $x \to \infty$ (bzw. *für* $x \to -\infty$) den *Grenzwert* c
$\underset{\text{Df}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt:
Wenn $x > b$ (bzw. $x < b$), so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ (bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$)

Entsprechend definiert man uneigentliche Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. **5/2/10**

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. **5/2/11/1**

f ist in $a = 1$ nicht definiert (also auch nicht stetig), aber f besitzt in $a = 1$ einen Grenzwert, nämlich $c = 2$. Dazu betrachten wir für $x \neq 1$

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} - 2\right|$$
$$= |(x + 1) - 2| = |x - 1| := (\star).$$

Ist $\varepsilon > 0$ und wählt man $\delta = \varepsilon$, dann erhält man für $|x - 1| < \delta$:
$|f(x) - 2| = |x - 1| = (\star) < \varepsilon$.

2. Sei $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. **5/2/11/2**

Behauptung: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

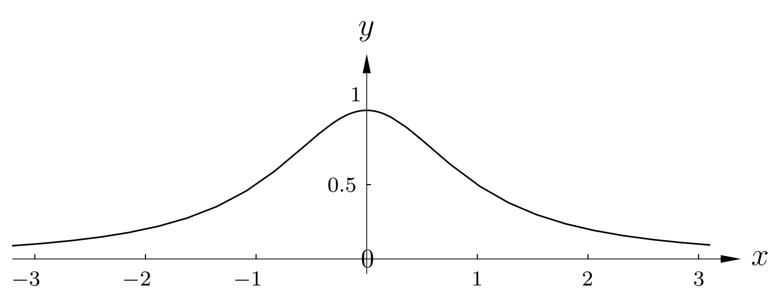


Abb. 5.14

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \geq 1$. Dann gilt

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x^2+1} - 0\right| = \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} := (\star).$$

Für alle $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ist $|f(x) - 0| \leq (\star) = \frac{1}{x} < \varepsilon$.

Satz 5.2 *Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:* **5/2/12**
f ist in a stetig gdw $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition des Grenzwertes. ❑ **5/2/13**

Satz 5.3 (*Folgenstetigkeit*) **5/2/14**
Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:
f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:
Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, so $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. ($\longrightarrow$) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man: **5/2/15**
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n, und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n.
Also $f(x_n) \to f(a)$.

($\longleftarrow$) Annahme, f ist in a nicht stetig.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.
Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit
$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$$x_n \to a \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon,$$

d.h., $f(x_n) \not\to f(a)$ $\lightning$! ❑

Jetzt können wir Grenzwertsätze bei Stetigkeitsuntersuchungen benutzen. **5/2/16**

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*) **5/2/17**
Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 5.3 erhält man die Behauptung unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen. 5/2/18

Wir skizzieren den Beweis für die Summe. Es sei $x_n \to a$. Dann ist

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) + g(a) = (f+g)(a). \qquad ❏$$

Satz 5.5 (*Stetigkeit der Verkettung*) 5/2/19

Seien f, g Funktionen mit $W(g) \subseteq D(f)$.
Ist g in a stetig und f in $g(a)$ stetig, dann ist $f \circ g$ in a stetig.

Beweis. Nach Definition der Stetigkeit ist g in a und f in $g(a)$ definiert, folglich ist $a \in D(f \circ g)$. 5/2/20

Sei (x_n) eine Folge in $D(f \circ g)$ mit $x_n \to a$. Dann ist g in x_n definiert, und wegen $W(g) \subseteq D(f)$ ist f in $g(x_n)$ definiert.
Aus der Stetigkeit von g in a folgt: $g(x_n) \to g(a)$.
Nach Voraussetzung ist f in $g(a)$ stetig. Dann gilt für jede Folge (y_n) in $D(f)$:

Wenn $y_n \to g(a)$, so $f(y_n) \to f(g(a))$.

Speziell für $y_n = g(x_n)$ gilt dann

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Nach Satz 5.3 ist also $f \circ g$ in a stetig. ❏

Satz 5.6 (*Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz von Bolzano*) 5/2/21

Ist f in dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ (d.h., $f(a) \cdot f(b) < 0$), *dann gibt es ein $c \in (a,b)$, so daß $f(c) = 0$.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. $f(a) < 0 < f(b)$ (sonst wird $-f(a) < 0 < -f(b)$ betrachtet). 5/2/22

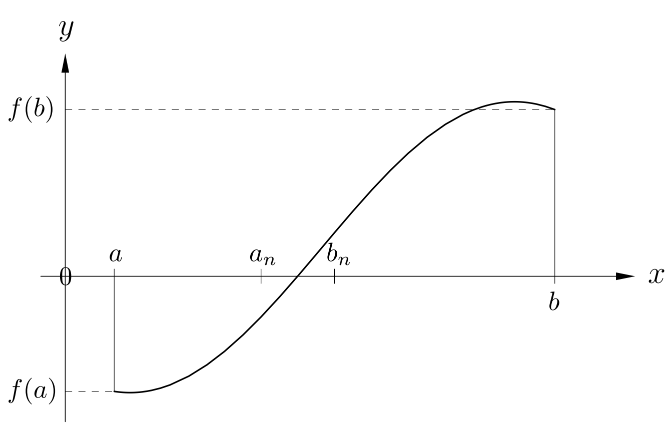


Abb. 5.15 Ist c_{n+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$, dann wird entsprechend der Bedingung $f(c_{n+1}) < 0$ bzw. $f(c_{n+1}) \geq 0$ das linke bzw. das rechte Teilintervall als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gewählt.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so daß

$$f(a_n) < 0 \le f(b_n) \quad \text{und} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Sei $a_0 := a$, $b_0 := b \implies f(a) < 0 \le f(b)$.
Für n sei $[a_n, b_n]$ schon definiert (mit den geforderten Eigenschaften).
Sei $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$; dann definieren wir

$$a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) \ge 0 \quad \text{und}$$
$$a_{n+1} = c_{n+1},\ b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) < 0.$$

Offenbar ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt und (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich existieren $\lim a_n$ und $\lim b_n$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ ist $\lim a_n = \lim b_n$.
Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein c mit $a_n \le c \le b_n$ für alle n.
$\implies \lim a_n = c = \lim b_n$.
Nach Voraussetzung ist $f(a_n) < 0 \le f(b_n)$ für alle n. Da f in c stetig ist, gilt:

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$$

Daraus folgt also $f(c) = 0$. ❏

Korollar (*Zwischenwertsatz*) **5/2/23**

Ist f in $[a,b]$ stetig, $d \in \mathbb{R}$ beliebig und $f(a) < d < f(b)$ oder $f(a) > d > f(b)$, dann existiert ein $c \in (a,b)$, so daß $f(c) = d$.

Beweis. Setzt man $g(x) = f(x) - d$, dann erfüllt g die Voraussetzungen des Nullstellensatzes. Folglich gibt es ein c mit $g(c) = 0 = f(c) - d$, also $f(c) = d$. ❏ **5/2/24**

Satz 5.7 *Ist f in $[a,b]$ injektiv und stetig, dann ist f in $[a,b]$ streng monoton.* **5/2/25**
($\implies f$ besitzt in $[a,b]$ eine Umkehrfunktion.)

Beweis. Übungsaufgabe! **5/2/26**
(Hinweis: Man nehme an, daß f nicht streng monoton ist und benutze den Zwischenwertsatz!) ❏

Satz 5.8 *Ist f in $[a,b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha,\beta]$ stetig, wobei $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.* **5/2/27**

Beweis. Nach Satz 5.7 ist f in $[a,b]$ streng monoton. **5/2/28**
Sei o.B.d.A. f in $[a,b]$ streng monoton wachsend und $\alpha := f(a)$, $\beta := f(b)$ (für „fallend“ verläuft der Beweis analog).
Dann ist $f(a) < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte d mit $f(a) < d < f(b)$ durch f angenommen, also $f([a,b]) = [f(a), f(b)] = [\alpha, \beta]$.

Sei $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Wir haben zu zeigen, daß f^{-1} in γ stetig ist.

Dazu sei (y_n) eine Folge mit $y_n \in [\alpha, \beta]$ und $y_n \to \gamma$.
Wegen $y_n, \gamma \in [\alpha, \beta] = f([a,b])$ existieren $x_n, c \in [a,b]$, so daß $f(x_n) = y_n$ und $f(c) = \gamma$. Damit ist (x_n) eine beschränkte Folge in $[a,b]$. Folglich besitzt (x_n) einen Häufungspunkt c_0 und eine gegen c_0 konvergierende Teilfolge $(x_{n_i}) : x_{n_i} \to c_0$. Da $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört c_0 zu $[a,b]$. Aus der Stetigkeit von f in $[a,b]$ folgt somit $f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$.

Da $y_n \to \gamma$ und (y_{n_i}) eine Teilfolge von (y_n) ist, gilt auch $y_{n_i} \to \gamma$. Also $y_{n_i} \to \gamma$ und $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$, folglich ist

$$f(c) = \gamma = f(c_0).$$

Gäbe es einen weiteren Häufungspunkt c' von (x_n), so gäbe es eine Teilfolge (x'_{n_i}) von (x_n) mit $x'_{n_i} \to c'$.
Analog wie im vorhergehenden Teil des Beweises existiert eine Teilfolge (y'_{n_i}) von (y_n) mit $y'_{n_i} = f(x'_{n_i}) \longrightarrow f(c')$. Wegen $y'_{n_i} \to \gamma$ gilt dann auch

$$f(c') = \gamma = f(c).$$

Aus der Injektivität von f folgt schließlich $c' = c_0 = c$. Die beschränkte Folge (x_n) besitzt also genau einen Häufungspunkt, und dieser ist c, also $x_n \to c$.

Nach Voraussetzung gilt: $y_n \to \gamma$. Folglich ist

$$f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_n)) = x_n \longrightarrow c = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(\gamma),$$

d.h., f ist an der Stelle γ stetig. ❏

Beispiel. Sei $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Dann ist offenbar f injektiv und stetig in $[0,b]$ **5/2/29**
für jedes $b > 0$ (folglich ist f auch in $[a, \infty)$ stetig). Nach dem vorhergehenden Satz ist $f^{-1} = \sqrt{x}$ in $[f(0), f(b)] = [0, b^2]$ stetig, also auch in $[0, \infty)$.

5.3 Elementare Funktionen

(1) **Rationale Funktionen** **5/3/0**

Definition. f ist eine *rationale Funktion* 5/3/1
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ f läßt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

Darstellung: $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ 5/3/2

Definition. f ist eine *ganze rationale Funktion* oder ein *Polynom über* $\mathbb{R}$ 5/3/3
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ f ist eine rationale Funktion, die ohne Division erzeugt werden kann.

Darstellung: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ 5/3/4

Satz 5.9 *Die rationalen Funktionen sind stetig.* 5/3/5

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus der Stetigkeit der identischen Funktion, der kon- 5/3/6
stanten Funktionen und der rationalen Operationen. ❑

(2) Entwickelte algebraische Funktionen 5/3/7

Definition. f ist eine *entwickelte algebraische Funktion* 5/3/8
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ f läßt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen und der Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\cdots}$ aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

Bemerkung. Bisher ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $n \geq 2$ und $x \geq 0$ definiert. Für ungerade n 5/3/9
läßt sich $\sqrt[n]{x}$ auch in dem Bereich $x < 0$ definieren. Hierfür legen wir fest:

$$\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}.$$

Für $n = 1$ gelte generell: $\sqrt[n]{x} = x$.

Beispiele (für entwickelte algebraische Funktionen) 5/3/10

$f(x) := \sqrt[n]{x};$

$g(x) = \sqrt[n]{ax^2 + bx + \sqrt{x^3 - c}} + x - d$

Bemerkung. Neben den entwickelten algebraischen Funktionen gibt es noch weitere 5/3/11
algebraische Funktionen.
Man nennt eine Funktion f *algebraisch*, wenn f Lösung einer algebraischen Gleichung ist, d.h., f ist eine Funktion, und es gibt Polynome $p_0(x), \ldots, p_n(x)$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$ gilt:

$$p_n(x)y^n + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0.$$

(vgl. Literaturangabe [2], Band I, Nr. 190, Begriff einer algebraischen Funktion)

Satz 5.10 *Die entwickelten algebraischen Funktionen sind stetig.* **5/3/12**

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus der Stetigkeit der Identitätsfunktion, der konstanten Funktionen, der Wurzelfunktionen (siehe nächste Bemerkung) und der Stetigkeit der rationalen Operationen. ❑ **5/3/13**

Bemerkung. Ist $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, dann ist offenbar $\sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion von f. Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in $[0, \infty)$ stetig. Für ungerade n ist f in $\mathbb{R}$ injektiv und somit die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{x}$ in ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. (vgl. auch Abb. 5.17). **5/3/14**
Für gerade n ist f in $(-\infty, 0]$ definiert und injektiv, folglich besitzt f in $(-\infty, 0]$ ebenfalls eine Umkehrfunktion $-\sqrt[n]{x}$ (vgl. Abb. 5.16).

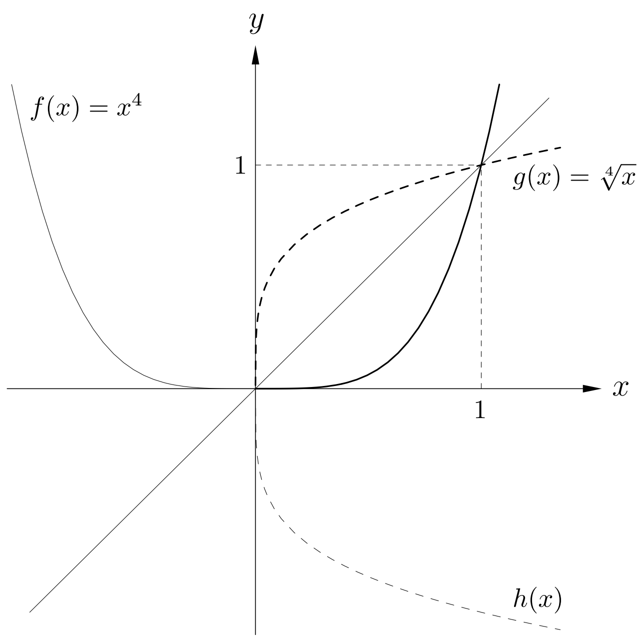


Abb. 5.16 Für gerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ und $h(x) = -\sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f, g und h in dieser Abbildung und in Abb. 5.6. (Dort wird der Spezialfall $n = 2$ und hier der Fall $n = 4$ dargestellt.) g ist die Umkehrfunktion von f für $x \geq 0$ und h die von f für $x \leq 0$.

Die nächste Abbildung zeigt den analogen Fall für ungerade n. Hierfür existiert die inverse Funktion im gesamten Definitionsbereich von f.

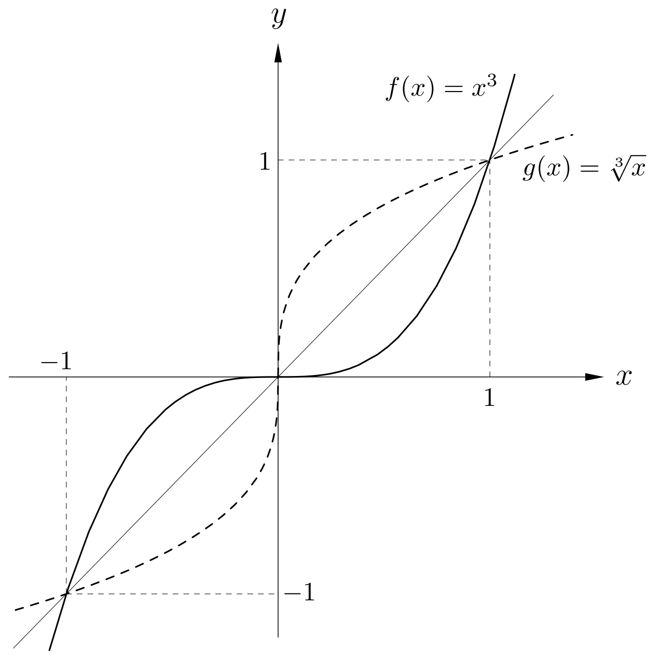


Abb. 5.17 Für ungerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f und g in dieser Abbildung. (Hier wird der Spezialfall $n = 3$ dargestellt.) Da f im gesamten Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ injektiv ist, besitzt f dort auch eine Umkehrfunktion, nämlich g (Graph von g dick gestrichelt).

(3) Elementare transzendente Funktionen

Neben den algebraischen Funktionen gibt es noch weitere, nämlich die sog. transzendenten Funktionen.

Definition. f ist *transzendent* $\underset{\text{Df}}{\equiv}$ f ist nicht algebraisch. **5/3/15**

Die Klasse der transzendenten Funktionen ist sehr unübersichtlich. Daher betrachten wir hier nur die wichtigsten und relativ leicht darstellbaren (die sog. elementaren) transzendenten Funktionen. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und ihren Eigenschaften. **5/3/16**

Exponentialfunktion **5/3/17**

In dem Abschnitt über Reihen haben wir schon gesehen, daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert (sogar absolut; zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß für $x = 0$ und $n = 0$ $x^n = 1$ gesetzt wurde).
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist also durch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ein Wert y festgelegt, d.h., durch die Reihe ist eine Funktion $f(x)$ definiert. (vgl. Abb. 5.18)

$$\textbf{Bez.:}\ f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ **5/3/18**

$f(x) = \exp(x)$ heißt *Exponentialfunktion*.

Satz 5.11 *Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:* **5/3/19**

(1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.

(2) *Für jedes* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).

(3) $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ *ist* $0 < \exp(x) < 1$, *und*
für $x > 0$ *ist* $1 < \exp(x)$.

(4) $\exp$ *ist streng monoton wachsend*
(folglich ist $\exp$ injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).

(5) $\exp(1) = \mathrm{e}$ $\left(\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

(6) *Für rationale* $x = \pm\dfrac{m}{n}$ *ist* $\exp(x) = \mathrm{e}^{\pm\frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).

(7) $\exp$ *ist stetig.*

Beweis. (1) ist trivial, da $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ für alle x konvergiert. **5/3/20**

(2). Übungsaufgabe!

(3). Es ist $\exp(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \implies$

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \implies$$
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

hieraus folgt insbesondere $\exp(x) \neq 0$. Für $x > 0$ ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1.$$

Für $x < 0$ ist $-x > 0$, also $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} < 1$, denn $\exp(-x) > 1$.

(4). Es sei $x_1 < x_2$; z.z.: $\exp(x_1) < \exp(x_2)$.
Wegen $x_1 < x_2$ gibt es ein $h > 0$, so daß $x_1 + h = x_2$. Folglich ist

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + h) = \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x_1).$$

(5). Es ist

$$\exp(1) = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-mal}\Big) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$1+\frac{1}{n} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!} = \exp\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Weiterhin gilt für $n \geq 2$

$$\Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}} = \exp\Big(\frac{1}{n}\Big) < \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n}\Big)^k \quad \text{(denn } \frac{1}{k!} < 1 \text{ für } k \geq 2)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Also

$$1+\frac{1}{n} < \Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} \quad \Longrightarrow$$

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < \exp(1) < \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^n \quad \Longrightarrow$$

$$e = \lim \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \leq \exp(1) \leq \lim \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^n = \mathrm{e} \quad \Longrightarrow$$

$$\exp(1) = \mathrm{e}.$$

(6). 1. $x = 0 \Longrightarrow$

$$\exp(0) = 1 = \mathrm{e}^0 = \Big(\exp(1)\Big)^0.$$

2. $x = m > 0 \Longrightarrow$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{m-mal}) = \exp(1)\cdots\exp(1) = \Big(\exp(1)\Big)^m.$$

3. $x = \frac{1}{n} \Longrightarrow$

$$\exp(1) = \exp\Big(n\cdot\frac{1}{n}\Big) = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n-mal}\Big) = \Big(\exp\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n \quad \Longrightarrow$$

$$\exp\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

4. $x = \frac{m}{n} > 0 \Longrightarrow$

$$\exp\Big(\frac{m}{n}\Big) = \exp\Big(m\cdot\frac{1}{n}\Big) = \Big(\exp\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^m = \Big(\Big(\exp(1)\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)^m = \Big(\exp(1)\Big)^{\frac{m}{n}}.$$

5. $x = -\frac{m}{n} < 0 \Longrightarrow$

$$\exp\Big(-\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{\exp\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{\Big(\exp(1)\Big)^{\frac{m}{n}}} = \Big(\exp(1)\Big)^{-\frac{m}{n}}.$$

(7). Wir zeigen zunächst, daß $\exp(x)$ in $a = 0$ stetig ist. Hierzu benutzen wir das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. Satz 4.24).

Wenn $x_i \neq 0$ und $x_i \to 0$, so $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{:= c_n} (x_i - 0)^n \xrightarrow[i\to\infty]{} c_0 = \frac{1}{0!} = 1$.

Also $\exp(x_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \exp(0) = 1$.

Sei jetzt $a \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_n \in \mathbb{R}$ und $x_n \to a$.

z.z.: $\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a)$.

g.z.z.: $\exp(x_n) - \exp(a) \longrightarrow 0$

$$\exp(x_n) - \exp(a) = \exp(a) \cdot \Big(\exp(\underbrace{x_n - a}_{\longrightarrow 0}) - 1 \Big) \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a),$$

also ist $\exp$ in a stetig. ❑

Bemerkung. Bisher ist e^x nur für rationale x definiert. Nach Satz 5.11 (6) gilt für rationale x stets $e^x = \exp(x)$. Wir erweitern jetzt den Definitionsbereich der Funktion e^x auf ganz $\mathbb{R}$ wie folgt: **5/3/21**

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \underset{\text{Df}}{=} \exp(x)$. **5/3/22**

Im folgenden schreiben wir für $\exp(x)$ kurz e^x. **5/3/23**

Satz 5.12 *Für* e^x *gilt:* **5/3/24**

(1) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

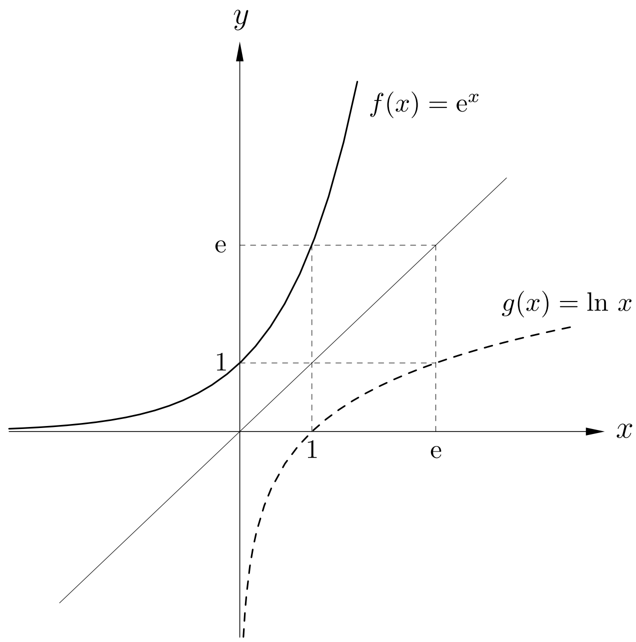
(2) e^x *nimmt jeden Wert* $y > 0$ *genau einmal an*
($\Longrightarrow$ $W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$).

Beweis. (1). Für $x > 0$ ist $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$ und $\lim_{x\to\infty} (1 + x) = \infty$. **5/3/25**

Für $x < 0$ ist $-x > 0$ und somit $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, denn $e^x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$.

(2). Sei $y > 0$ beliebig.

Aufgrund der Eigenschaft (1) gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $e^a < y < e^b$. Da die Funktion e^x in $\mathbb{R}$ stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz den Wert y an. Andererseits kann y auch nur einmal angenommen werden, denn e^x ist nach Satz 5.11 (4) streng monoton wachsend. ❑



5/3/26

Abb. 5.18 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ und den natürlichen Logarithmus $g(x) = \ln\, x$. Hier ist zu erkennen, daß $D(\mathrm{e}^x) = W(\ln\, x)$ und $D(\ln\, x) = W(\mathrm{e}^x)$.
Weiterhin wird deutlich, daß $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ und $g(1) = \ln\, 1 = 0$, $g(\mathrm{e}) = \ln\, \mathrm{e} = 1$.

Logarithmusfunktion

Aufgrund der strengen Monotonie von e^x besitzt diese Funktion eine Umkehrfunktion.

Definition. (*natürlicher Logarithmus*) 5/3/27
Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus.*

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$

Es gilt: $D(\ln) = W(\exp) = (0, \infty]$ und $W(\ln) = D(\exp) = \mathbb{R}$. 5/3/28

Satz 5.13 ln *hat folgende Eigenschaften*: 5/3/29

(1) $\ln \mathrm{e} = 1$, $\ln \mathrm{e}^x = x$ *und* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

(2) ln *ist stetig.*

(3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).

(4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ *ist* $\ln x < 0$, *und für* $1 < x$ *ist* $0 < \ln x$.

(5) ln *ist streng monoton wachsend.*

(6) *Für rationale* r *und reelle* $x > 0$ *gilt*: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus den Eigenschaften von e^x. 5/3/30
Als Beispiel zeigen wir (3).

Annahme: $\ln(x \cdot y) \neq \ln x + \ln y$.
Aus der Injektivität von e^x folgt dann

$$x \cdot y = \mathrm{e}^{\ln(x \cdot y)} \neq \mathrm{e}^{\ln x + \ln y} = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln x}}_{=x} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\ln y}}_{=y} = x \cdot y \quad ↯! \qquad \square$$

Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ **5/3/31**

Definition. (*Exponentialfunktion zur Basis* a) **5/3/32**
Sei $a > 0$. $a^x \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$ (*Exponentialfunktion zur Basis* a).

Es gilt: $D(a^x) = D(\mathrm{e}^x) = \mathbb{R}$ und $W(a^x) = (0, \infty)$, falls $a \neq 1$. **5/3/33**

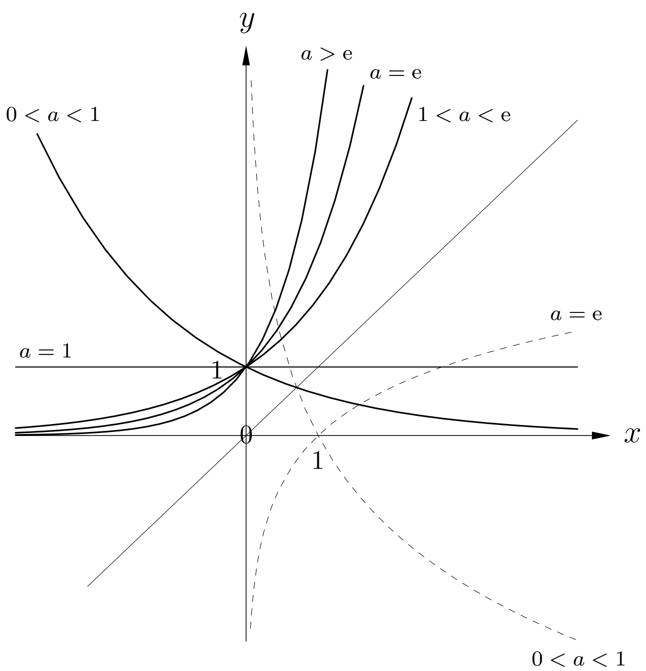


Abb. 5.19 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ bei verschiedenen Basen $a > 0$ (durchgezogene Kurven). Für $a \neq 1$ ist $f(x) = a^x$ injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $\log_a x$. Die gestrichelten Kurven geben jeweils eine inverse Funktion von $f(x) = a^x$ an, und zwar für $a = \mathrm{e}$ bzw. für $0 < a < 1$.

Satz 5.14 *Es seien* $a, b > 0$. *Dann gilt:* **5/3/34**

(1) $\ln a^x = x \cdot \ln a$,
(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
(4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,
(5) a^x *ist stetig.*
(6) *Für* $0 < a < 1$ *ist* a^x *streng monoton fallend, und*
für $1 < a$ *ist* a^x *streng monoton wachsend,*
für $a = 1$ *ist* a^x *konstant* 1.
(7) *Für* $0 < a < 1$ *ist* $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$, *und*
für $a < 1$ *ist* $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht mit Hilfe der Eigenschaften von e^x. ❏ **5/3/35**

Logarithmus zur Basis $a > 0,\ a \neq 1$ **5/3/36**

a^x ist für $a > 0$ und $a \neq 1$ streng monoton, also auch injektiv. Folglich besitzt a^x eine Umkehrfunktion.

Definition. (*Logarithmus zur Basis* a) **5/3/37**
Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion von a^x heißt *Logarithmus zur Basis* a.

Bez.: $\log_a x$ und $\lg x$ bzw. $\ln x$, falls $a = 10$ bzw. $a = \mathrm{e}$. **5/3/38**

Folgerung. Aus der Definition ergibt sich sofort: **5/3/39**
$D(\log_a x) = W(a^x) = (0, \infty)$ und $W(\log_a x) = D(a^x) = \mathbb{R}$.

Satz 5.15 *Sei* $a > 0$ *und* $a \neq 1$. *Dann gilt:* **5/3/40**

(1) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

(2) $\log_a x$ *ist stetig.*

(3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

(4) *Für* $0 < a < 1$ *ist* $\log_a x$ *streng monoton fallend,*
für $1 < a$ *ist* $\log_a x$ *streng monoton wachsend.*

(5) *Für* $b > 0$ *ist* $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$ *und* $\log_b x = \dfrac{\ln a}{\ln b} \cdot \log_a x$.

Beweis. (1). Sei $y = \log_a x$. Dann ist $a^y = x$ und somit $\underbrace{\ln a^y}_{y \cdot \ln a} = \ln x \implies y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. **5/3/41**

Hieraus folgen leicht die restlichen Behauptungen. ❏

Potenzfunktion **5/3/42**

Definition. (*Potenzfunktion mit beliebigem Exponenten*) **5/3/43**
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.
$x^a \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{e}^{a \cdot \ln x}$ heißt *Potenzfunktion* (mit dem Exponenten a).

Bemerkung. Die Eigenschaften von x^a folgen entsprechend der Definition sofort aus den Eigenschaften von e^x und $\ln x$. Insbesondere ist x^a stetig und **5/3/44**

$$D(x^a) = D(\ln x) = (0, \infty) \text{ und } W(x^a) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{für } a \neq 0 \\ \{1\}, & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Weiterhin ist x^a für $a \neq 0$ streng monoton. Folglich besitzt x^a eine Umkehrfunktion, die ebenfalls eine Potenzfunktion ist, nämlich die Funktion $x^{\frac{1}{a}}$ (vgl. Abb. 5.20).

Für gewisse Exponenten a läßt sich x^a auch in $(-\infty, 0)$ definieren, z.B. für alle ganzzahligen a und auch für alle $a = \dfrac{1}{n}$, falls n ungerade ist. Dann ist nämlich $x^a = x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{-x}$, und für $-x > 0$ ist die n-te Wurzel schon definiert.

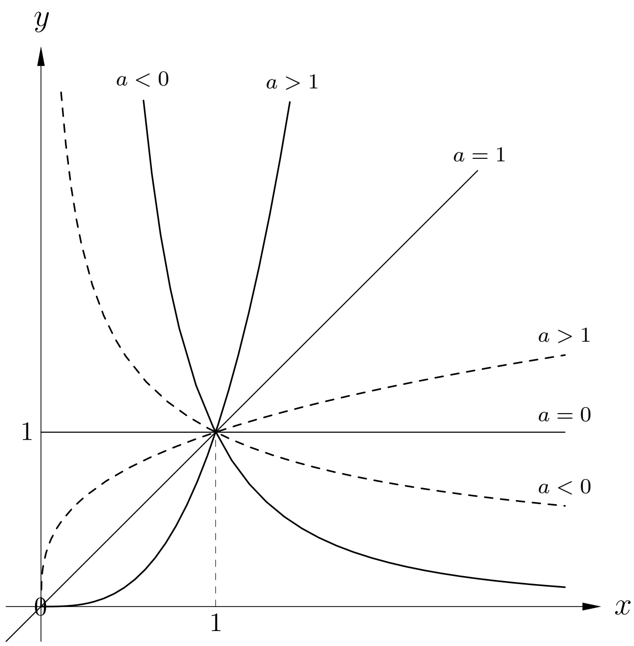


Abb. 5.20 Die Abbildung zeigt die Potenzfunktion $f(x) = x^a$ mit verschiedenen Exponenten $a \in \mathbb{R}$. Für $a \neq 0$ und $x > 0$ ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion. Die gestrichelten Kurven zeigen die Umkehrfunktionen von $f(x) = x^a$ für $a > 1$ bzw. $a < 0$. Die inverse Funktion von x^a ist $x^{\frac{1}{a}}$ und somit wieder eine Potenzfunktion. Für $a = 1$ (also $x^a = x = I(x)$) ist die Umkehrfunktion identisch mit der Ausgangsfunktion $I(x)$. Ist $a = 0$, dann ist x^a konstant.

Trigonometrische Funktionen

In der Schule werden sin und cos in der Regel am Einheitskreis eingeführt (vgl. Abb. 5.21 und 5.22).

Der Anschauung entnimmt man:

(1) $\sin 0 = 0,\ \sin \dfrac{\pi}{2} = 1,\ \cos 0 = 1,\ \cos \dfrac{\pi}{2} = 0.$

(2) sin und cos sind periodisch mit der kleinsten Periode 2π.

(3) sin ist ungerade, d.h., $\sin(-x) = -\sin x$.

(4) cos ist gerade, d.h., $\cos(-x) = \cos x$.

(5) sin ist an der Stelle 0 stetig. Hierbei benutzt man, daß $|\sin x| \leq |x|$ ist, was wiederum der Anschauung entnommen wird.

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (hier wird der Satz des Pythagoras vorausgesetzt).

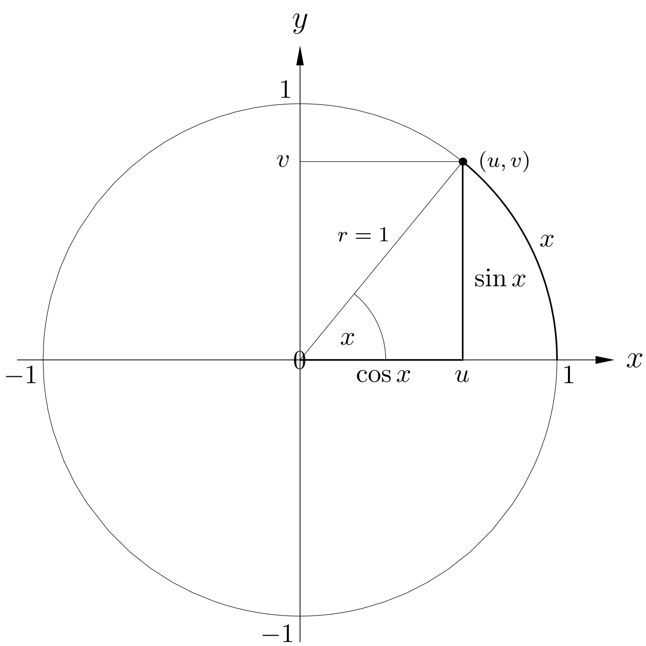


Abb. 5.21 Die Abbildung zeigt, wie am Einheitskreis (:= Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt (0,0)) die Funktionen sin und cos eingeführt werden können. Der Winkel x ist in Bogenmaß gemessen (:= Länge des durch dickere Strichstärke hervorgehobenen Kreisbogenstücks). cos bzw. sin sind dann definiert durch: $\cos x := u$, $\sin x := v$.

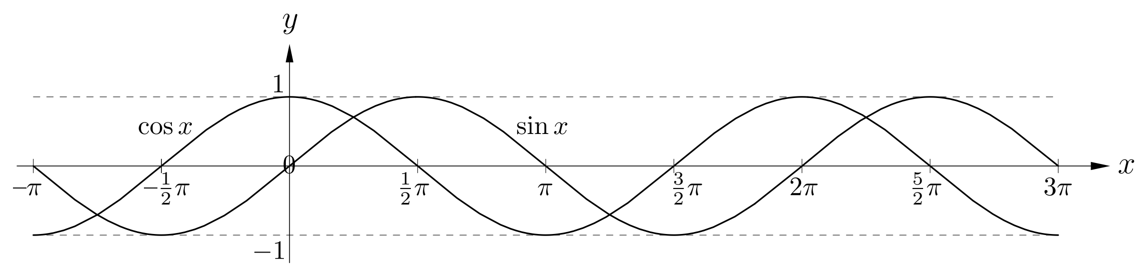


Abb. 5.22 zeigt sin und cos im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß der Schüler wesentliche Eigenschaften der ansonsten komplizierten Funktionen der Anschauung entnimmt. Die Nachteile sind allerdings darin zu sehen, daß die Anschauung als Beweismittel überhaupt zugelassen wird und daß z.B. die Zahl π und Eigenschaften des Kreises als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir kommen jetzt zu einer anderen Definition der trigonometrischen Funktionen.

Hierzu betrachten wir die Exponentialfunktion e^z, die bekanntlich mit Hilfe der Potenzreihe $\mathrm{e}^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definiert ist. Diese Potenzreihe ist (wie früher gezeigt wurde) für alle komplexen Zahlen z absolut und damit auch unbedingt konvergent. Folglich ist $\exp(z)$ auch in der gesamten komplexen Ebene definiert. Wir betrachten jetzt den Spezialfall $z = ix$ und berechnen von e^{ix} den Real- und Imaginärteil:

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\underset{\mathrm{Df}}{=} \; \cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\underset{\mathrm{Df}}{=} \; \sin x} .
\end{aligned}
$$

Also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Damit ergibt sich die folgende Definition.

Definition. (cos, sin) **5/3/45**

$$\cos x \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Folglich sind sin und cos in $\mathbb{R}$ definiert. **5/3/46**

An dieser Stelle ist nicht einzusehen, daß die so eingeführten Funktionen sin und cos dieselben sein sollen, die man anschaulich am Einheitskreis gewinnt. Erst mit Hilfe der Differentialrechnung werden wir später nachweisen können, daß es sich tatsächlich um die gleichen Funktionen handelt.

Satz 5.16 sin *und* cos *haben folgende Eigenschaften*: **5/3/47**

(1) sin *und* cos *sind in* $\mathbb{R}$ *definiert*, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

(2) sin *ist ungerade und* cos *ist gerade.*

(3) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (\Longrightarrow \ \sin 2x = 2 \sin x \cos x)$.

(4) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (\Longrightarrow \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$.

(5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.

(6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.

(7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\Longrightarrow \ |\sin x|, |\cos x| \leq 1)$.

(8) sin *und* cos *sind stetig.*

Beweis. (1) ist nach Definition trivial. **5/3/48**

(2) folgt unmittelbar aus der Definition von sin und cos .

(3) und (4) zeigt man mit Hilfe des Cauchyprodukts der entsprechenden Reihen (vgl. Übungsaufgaben).

(5) und (6) folgen aus (3) und (4), indem man auf der linken Seite von (5) bzw. (6) jeweils x, y in der Form $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ und $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ schreibt.

(7). Nach (1) ist $\cos 0 = 1$; folglich erhält man mit Hilfe von (4):

$$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Damit gilt auch

$$0 \le \cos^2 x \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \le \sin^2 x \le 1,$$

und schließlich

$$|\sin x| \le 1, \ |\cos x| \le 1.$$

(8). $\sin$ und $\cos$ sind durch Potenzreihen definiert, diese sind in $x = 0$ stetig (vgl. Beweis zu Satz 5.11 (7)). Also gilt:

Wenn $x \to 0$, so $\sin x \to \sin 0 = 0$ und $\cos x \to \cos 0 = 1$.

Wir beweisen jetzt die Stetigkeit von $\sin$ an einer beliebigen Stelle $a \neq 0$.
g.z.z.: Wenn $x \to a$, so $\sin x \to \sin a$, d.h., $\sin x - \sin a \longrightarrow 0$.

Es sei $x \to a$. Nach (5) gilt:

$$\sin x - \sin a = 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}.$$

Wegen $x \to a \iff \dfrac{x-a}{2} \to 0$ erhält man

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \cdot \underbrace{\left|\cos \frac{x+a}{2}\right|}_{\le 1} \le \underbrace{\left|\sin \frac{x-a}{2}\right|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$

Für $\cos$ ergibt sich mit Hilfe von (6) die analoge Behauptung. ❏

Bemerkung. Die Eigenschaften (3) – (6) im Satz 5.16 heißen auch *Additionstheoreme* **5/3/49**
von $\sin$ und $\cos$.

Im folgenden wird die Zahl π definiert. Es genügt offensichtlich $\frac{\pi}{2}$ festzulegen, und dies wird sich als kleinste positive Nullstelle von $\cos$ erweisen. Dazu müssen wir zeigen, daß $\cos$ überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Hierzu benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 1. $\cos 2 < 0$.

Beweis. Es ist **5/3/50**

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!}$$

$$= \underbrace{1 - 2 + \frac{4^2}{4!}}_{=-\frac{1}{3}<1} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!}}_{(\star)}.$$

$(\star)$ ist eine alternierende Reihe; das erste Glied (für $n = 3$) ist negativ und $\left(\dfrac{4^n}{(2n)!}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist die Reihe konvergent, und ihr Wert (vgl. Beweis des Leibniz-Kriteriums) ist negativ. Insgesamt gilt damit $\cos 2 < 0$. ❑

Lemma 2. $\cos$ *hat in* $[0, 2]$ *eine Nullstelle.* **5/3/51**

Beweis. Es ist $\cos 0 = 1 > 0 > \cos 2$. **5/3/52**
$\cos$ ist im gesamten Definitionsbereich stetig, also auch in $[0, 2]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in (0, 2)$, so daß $\cos c = 0$. ❑

Wir zeigen jetzt, daß c die einzige Nullstelle von $\cos$ in $[0, 2]$ ist. Dann besitzt $\cos$ **5/3/53**
eine kleinste positive Nullstelle, die mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird. Dazu benötigen wir aber das folgende

Lemma 3. $\sin x > 0$ *für alle* $x \in (0, 2)$.

Beweis. Übungsaufgabe! (Hinweis: Beweis ähnlich wie für Lemma 1) ❑ **5/3/54**

Korollar. $\cos$ *hat in* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle.* **5/3/55**

Beweis. Angenommen, es existieren $x, y \in [0, 2]$, mit $x \neq y$ und $\cos x = \cos y = 0$. **5/3/56**
Sei o.B.d.A. $y < x$. Dann gilt:

$$0 = \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\in (0,2)} \cdot \sin \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in (0,2)} \neq 0,$$

denn nach Lemma 2 ist $\sin$ in $(0, 2)$ positiv. ↯! ❑

Definition. (π) $\quad \dfrac{\pi}{2}$ wird als die kleinste positive Nullstelle von $\cos$ definiert **5/3/57**
(d.h., $\pi = 2c = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \implies 0 < \pi < 4$).

Bemerkung. Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich weitere Eigenschaften für **5/3/58**
$\sin$ und $\cos$ herleiten.

(1) Es gilt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ speziell für $x = \dfrac{\pi}{2}$. Wegen $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ ist $\sin^2 \dfrac{\pi}{2} = 1$.
Weiterhin ist $\sin x > 0$ für $x \in (0, 2)$. Folglich ist $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.

(2) $\cos \pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos \dfrac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \underbrace{\cos \dfrac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin \dfrac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \dfrac{\pi}{2}}_{=1} = -1$ usw.

Definition. (*periodische Funktion*) **5/3/59**
f ist periodisch mit der Periode p
$\underset{\text{Df}}{=}$ Für jedes x gilt:
(1) $x \in D(f) \iff x + p \in D(f)$ und
(2) $f(x) = f(x + p)$.

Satz 5.17 sin *und* cos *sind periodisch mit der Periode* 2π, *und es ist* **5/3/60**
$\sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos x$ *und* $\cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin x$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht mit Hilfe der Additionstheoreme. ❑ **5/3/61**

Tangens, Cotangens **5/3/62**

Definition. (*Tangens, Cotangens*) **5/3/63**
$\tan x \underset{\text{Df}}{=} \dfrac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x \underset{\text{Df}}{=} \dfrac{\cos x}{\sin x}.$

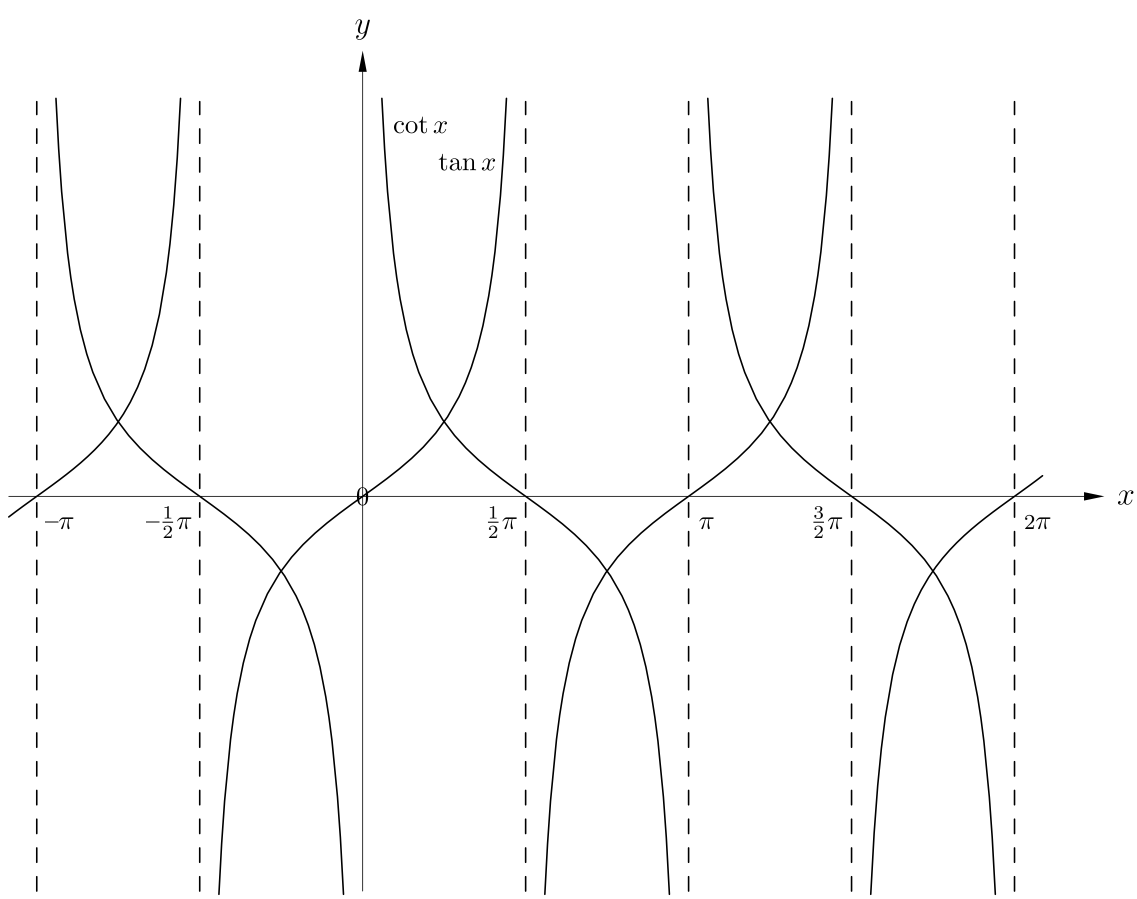


Abb. 5.23 zeigt tan und cot im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von sin und cos erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von tan und cot. Insbesondere gilt: **5/3/64**
$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, \cos x = 0\}$, $W(\tan) = \mathbb{R}$;
$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, \sin x = 0\}$, $W(\cot) = \mathbb{R}$.
tan und cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;
tan und cot sind wie sin und cos periodisch, allerdings mit der Periode π.

Ähnlich wie sin und cos lassen sich auch tan und cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

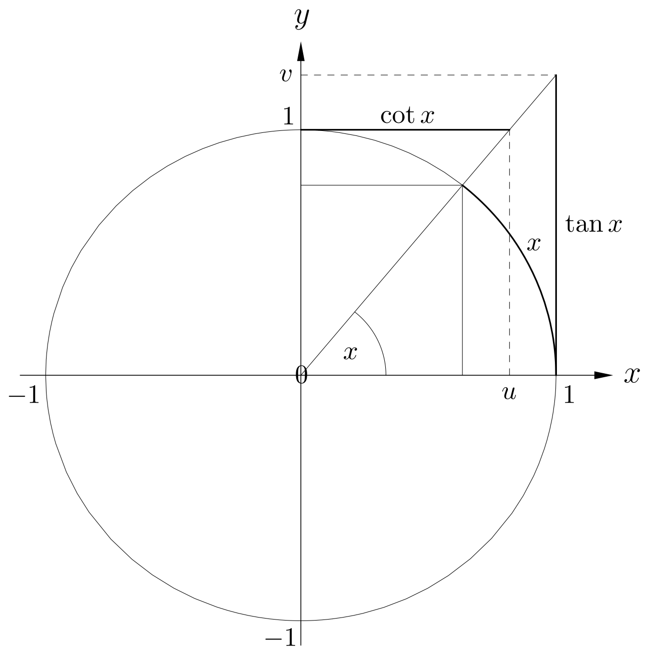


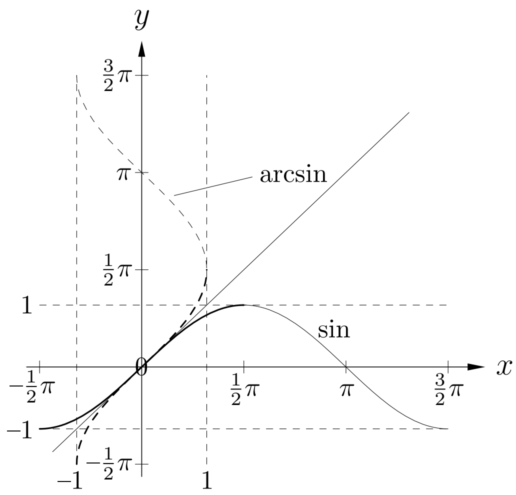
Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen tan und cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. cot bzw. tan sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan, cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit arcsin, arccos, arctan, arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21 . Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v). Also

$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x$ (:= die zu $\sin x$ gehörende Bogenlänge).

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.
Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0,\pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0,\pi]$ dargestellt.



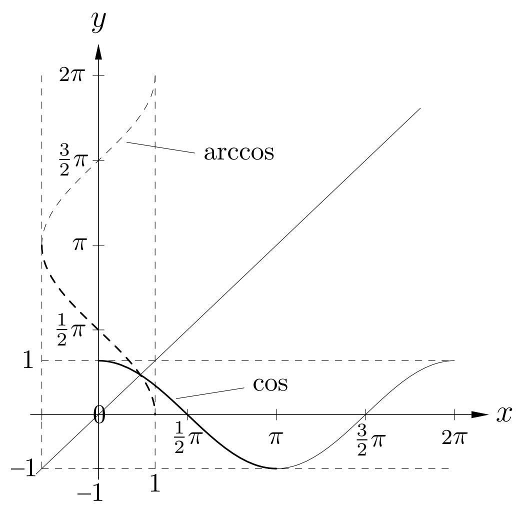
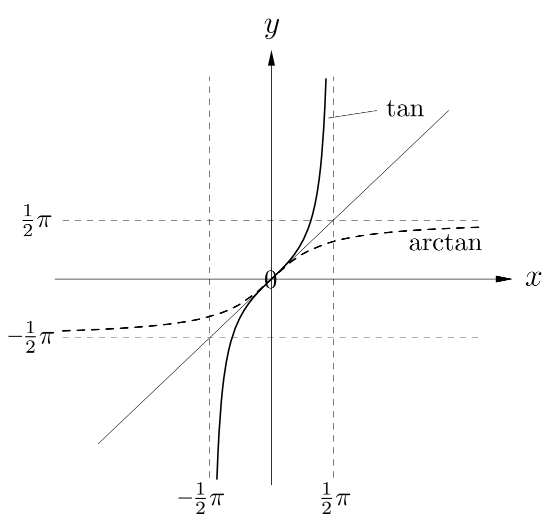


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.



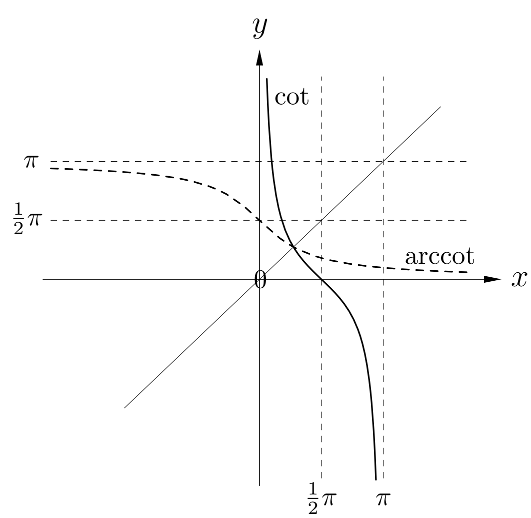


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von

Funktionen

Am Ende von Kapitel 3 haben wir bereits Funktionenfolgen und ihre Konvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz definiert, ohne damit irgendwelche Anwendungen zu verbinden. Bevor wir dies tun, sollen zunächst noch Funktionenreihen definiert werden. **5/4/0**

Definition. (*Funktionenreihe*) **5/4/1**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei $F_n := \sum_{i=0}^{n} f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe.*

$$\textbf{Bez.:}\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \quad \text{oder einfach} \quad \sum f_i \quad \text{bzw.} \quad \sum f_i(x)$$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) gegen f
$\underset{\mathrm{Df}}{=\!=}$ (F_n) ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f.

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *absolut konvergent* gegen f
$\underset{\mathrm{Df}}{=\!=}$ $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f.

Bemerkung. Funktionenreihen sind also spezielle Funktionenfolgen. Alles, was über Funktionenfolgen ausgesagt wird, trifft sinngemäß auch auf Funktionenreihen zu. Potenzreihen sind offenbar spezielle Funktionenreihen. **5/4/2**

Wir befassen uns zunächst mit einigen wichtigen Konvergenzkriterien für Funktionenfolgen und -reihen.

Satz 5.18 (*Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz*) **5/4/3**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind.

(1) *(f_n) ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt:* $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

(2) *$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt:* $\left|\sum_{i=0}^{m} f_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right| < \varepsilon$

($\Longleftrightarrow$ $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x)\right| < \varepsilon$, falls $m > n$ und $m = n + k$).

Beweis. (1). ($\longrightarrow$) Sei (f_n) in M gleichmäßig konvergent gegen f und $\varepsilon > 0$. **5/4/4**
Nach Definition existiert ein n_0, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ und für jedes $x \in M$ gilt:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man die Behauptung.

($\longleftarrow$) Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen mit konstanten Gliedern konvergiert die Zahlenfolge $\big(f_n(x)\big)$ für jedes fixierte $x \in M$ gegen einen Grenzwert, der mit $f(x)$ bezeichnet wird. f ist damit eine in M definierte Funktion.
Wir haben zu zeigen, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei x beliebig aber fest. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \underbrace{|f_m(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} = \Big| \lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_n(x) \Big| = |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(2) erhält man leicht mit Hilfe von (1). ❑

Satz 5.19 (*Majorantenkriterium für Funktionenreihen*) **5/4/5**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es seien c_n reelle Zahlen.
Ist $|f_n(x)| \leq c_n$ für fast alle n und alle $x \in M$, und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig und absolut konvergent in M.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums.) **5/4/6**
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\Big| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \Big| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i < \varepsilon$$

für hinreichend große n. Folglich ist die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Die absolute Konvergenz erhält man sofort aus dem Majorantenkriterium für Reihen mit konstanten Gliedern. ❑

Beispiel. Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann sind nach dem obigen Satz die Funk- **5/4/7**
tionenreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = a_n \cdot \sin(nx) \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \quad \text{mit} \quad g_n(x) = a_n \cdot \cos(nx)$$

in $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.

Satz 5.20 (*Reelle*) *Potenzreihen konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig.* **5/4/8**

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$ und **5/4/9**
$\varrho_1 < \varrho$. Für $|x-a| \leq \varrho_1 < \varrho$ ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent. Folglich ist $\sum |a_n|\varrho_1^n$ konvergent. Mit Hilfe des Majorantenkriteriums für Funktionenreihen erhält man sofort die Behauptung. ❑

Satz 5.21 (*Stetigkeit der Grenzfunktion*) **5/4/10**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine in M definierte Funktionenfolge, und alle f_n seien in a bzw. in ganz M stetig.

(1) *Konvergiert (f_n) in M gleichmäßig gegen f, dann ist f in a bzw. in M stetig.*

(2) *Konvergiert $\sum f_n$ in M gleichmäßig gegen f, dann ist f in a bzw. in M stetig.*

Beweis. (1). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein **5/4/11**
n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in M$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert ein $\delta_n > 0$, so daß für jedes $x \in M$ gilt:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_n, \text{ so } |f_n(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $|x-a| < \delta_n$ und $n \geq n_0$ erhält man daraus:

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{:=(\star)<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{:=(\star\star)<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{:=(\star\star\star)<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

$\big((\star), (\star\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}$ folgen aus der gleichmäßigen Konvergenz und $(\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}$ aus der Stetigkeit der f_n.$\big)$

(2) folgt sofort aus (1), denn mit $f_0, \ldots, f_n$ ist auch $F_n := \sum_{i=0}^{n} f_i$ stetig. ❑

Korollar. (*Reelle*) *Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzintervalls stetig.* **5/4/12**

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen und der Stetigkeit der Grenzfunktion. ❑ **5/4/13**

Bemerkung. **5/4/14**

Aus dem letzten Satz und dem zugehörigen Korollar erhält man weiterhin:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x).$

(Vertauschbarkeit zweier Limites bei gleichmäßig konvergenten Folgen)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

(Vertauschbarkeit des Limes mit der unendlichen Summe bei gleichmäßig konvergenten Reihen)

(3) Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig.

(4) Das Beispiel 5/4/7 zeigt, daß Funktionenreihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n\cdot\sin(nx) + b_n\cdot\cos(nx)\Big)$$

stetige Funktionen definieren, wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren. Hieraus ergeben sich interessante und wichtige Möglichkeiten für die Darstellung weiterer nichtelementarer Funktionen. Hiermit befaßt sich die Theorie der *Fourierreihen*, die wir jedoch nicht behandeln werden (siehe Literaturangabe [4], Teil II, Seite 109 – 116 oder [1], Teil 2, Seite 118 – 173).

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 5

- Definitionen: reelle Funktion, $D(f)$, $W(f)$, **5/5/1**
- Operationen für reellwertige Funktionen (rationale Operationen, Verkettung, Inversenbildung), **5/5/2**
- Stetigkeit, Grenzwerte, **5/5/3**
- Kriterien für die Stetigkeit (Sätze 5.2 und 5.3), **5/5/4**
- Stetigkeit der rationalen Operationen und der Verkettung (Sätze 5.4 und 5.5), **5/5/5**
- Zwischenwertsatz (Beweisidee); (Satz 5.6 + Korollar), **5/5/6**
- Stetigkeit der inversen Funktion (Satz 5.8), **5/5/7**
- elementare Funktionen: rationale Funktionen, ganze rationale Funktionen (Polynome), algebraische Funktionen, transzendente Funktionen (Exponentialfunktionen, Logarithmus, Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen, Arcus-Funktionen), **5/5/8**
- wichtige Eigenschaften dieser Funktionen (Definitionsbereich, Stetigkeit, grober Verlauf, Werte der Funktionen an ausgezeichneten Stellen), **5/5/9**
- Definition von π. **5/5/10**
- Definitionen: Funktionenreihe, Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen, **5/5/11**
- Cauchysches Konvergenzkriterium, Majorantenkriterium für Funktionenfolgen und -reihen (Sätze 5.18, 5.19, 5.20), **5/5/12**
- Stetigkeit der Grenzfunktion (Satz 5.21 + Korollar). **5/5/13**