

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.2 Für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

6/1/7

- (1) $|\bar{a}| \geq 0$, und $|\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$.
- (2) $|r \cdot \bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$.
 $(\implies |-\bar{a}| = |\bar{a}| \text{ und } |\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}|)$. (Symmetrie des Abstands)
- (3) $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. (Dreiecksungleichung)
- (4) $|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{b}|$, } (Formen der Dreiecksungleichung)
- (5) $||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$.

Beweis. (1) und (2) sind trivial (analog wie für komplexe Zahlen).

6/1/8

(3) wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung bewiesen (analog wie für komplexe Zahlen).

(4) und (5) folgen aus (3) wie bei den reellen Zahlen. \square