

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Satz 6.4** (Satz von Bolzano-Weierstraß)

6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus  $\mathbb{R}^n$  besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

**Beweis.** (Der Beweis erfolgt mit einer sog. Würfelschachtelung, die analog zu einer Intervallschachtelung induktiv konstruiert wird).

6/1/25

Beweisidee: Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M$  unendlich und beschränkt. Dann läßt sich  $M$  in eine Kugel und damit auch in einen  $n$ -dimensionalen Würfel  $W_0 := [a_1^0, b_1^0] \times \dots \times [a_n^0, b_n^0]$  mit endlicher Kantenlänge einschließen, wobei  $a_i^0, b_i^0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_i^0 < b_i^0$  und  $b_i^0 - a_i^0 = b_j^0 - a_j^0$  für  $i, j = 1, \dots, n$ . Es gilt also  $M \subseteq W_0$ .

Die Kanten des Würfels werden durch die Intervalle  $[a_i^0, b_i^0]$  auf den Koordinatenachsen repräsentiert (vgl. Abb. 6.4).

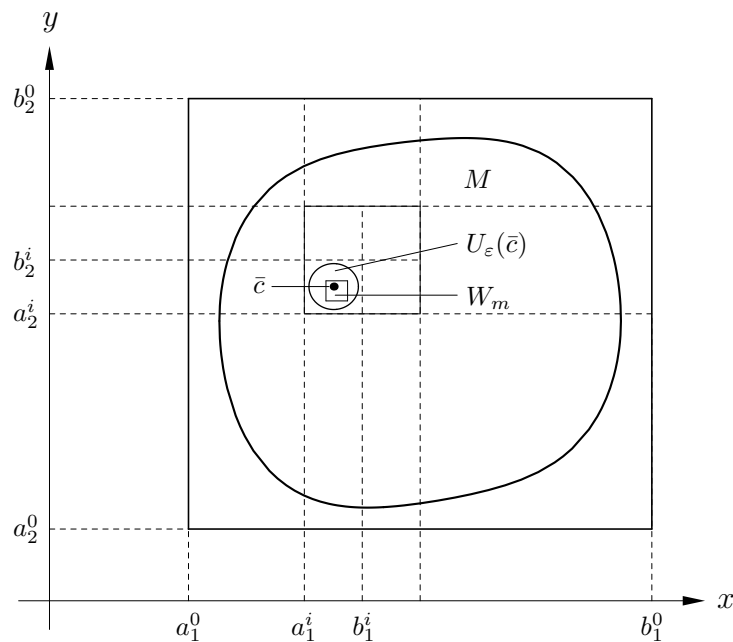


Abb. 6.4 In der Abbildung wird der Fall  $n = 2$  dargestellt. Aufgrund der betrachteten Zerlegung gibt es bei jedem Schritt wenigstens einen Teilwürfel, in dem unendlich viele Elemente aus  $M$  enthalten sind; einen solchen Teilwürfel wählt man jeweils aus und zerlegt ihn weiter. Für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  gibt es dann einen Teilwürfel  $W_m$ , so daß  $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$ .

Durch Halbierung der Würfelmkanten entsteht eine Zerlegung von  $W_0$  in endlich viele Teilwürfel  $W_0^1, \dots, W_0^k$ , (in unserem Fall ist  $k = 2^n$ ) und  $W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i$ .

Dann ist

$$M \cap W_0 = M \cap \left( \bigcup_{i=1}^k W_0^i \right) = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i)$$

unendlich. Folglich gibt es einen Teilwürfel  $W_0^i$ , so daß schon  $M \cap W_0^i$  unendlich ist. Wir wählen einen solchen Teilwürfel  $W_0^i$  aus und nennen ihn  $W_1$ .

Es sei jetzt  $W_m$  schon definiert mit den folgenden Eigenschaften:

Die Kantenlänge von  $W_m$  ist  $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$  und  $M \cap W_m$  ist unendlich.

Analog wie bei  $W_0$  halbieren wir jetzt die Kanten von  $W_m$  und erhalten eine Zerlegung von  $W_m$  in  $k$  Teilwürfel  $W_m^1, \dots, W_m^k$ , so daß

$$W_m = \bigcup_{i=1}^k W_m^i \quad \text{und} \quad M \cap W_m = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_m^i).$$

Da nach Voraussetzung  $M \cap W_m$  unendlich ist, existiert ein  $W_m^i$ , so daß  $M \cap W_m^i$  unendlich ist; sei  $W_{m+1} := W_m^i$ .

Auf diese Weise entsteht eine Folge  $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_m \supseteq \dots$  von ineinander geschachtelten Würfeln. Für den Würfel  $W_m$  sei die  $j$ -te Würfelkante ( $j = 1, \dots, n$ ) durch das Intervall  $[a_j^m, b_j^m]$  gegeben. Offenbar ist  $([a_j^m, b_j^m])_{m=0,1,2,\dots}$  dann eine Intervallschachtelung in  $\mathbf{R}$ . Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein  $c_j$ , so daß  $c_j \in [a_j^m, b_j^m]$  für fixiertes  $j$  mit  $j \in \{1, \dots, n\}$  und  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Behauptung:  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$  ist ein Häufungspunkt von  $M$ .

Offenbar ist  $\bar{c} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W_m$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$  kann mit wachsendem  $m$  die Kantenlänge des  $m$ -ten Würfels so klein gemacht werden, daß für hinreichend große  $m$  der ganze Würfel  $W_m$  zu  $U_\varepsilon(\bar{c})$  gehört:  $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$ . Da  $M \cap W_m \subseteq W_m$  und  $M \cap W_m$  unendlich ist, liegen in  $U_\varepsilon(\bar{c})$  unendlich viele Elemente aus  $M$ ; folglich ist  $\bar{c}$  ein Häufungspunkt von  $M$ .  $\square$