Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

Satz 6.5 *Es sei* $M \subseteq \mathbb{M}$ *und* $C(M)$ *das Komplement von* M *bez.* $\mathbb{M}$. **6/1/27**
Dann gilt: M *ist offen gdw* $C(M)$ *abgeschlossen ist.*

Beweis. $(\longrightarrow)$ Sei M offen und a ein Häufungspunkt von $C(M)$. **6/1/28**
z.z.: $a \in C(M)$.

Annahme: $a \notin C(M)$ $(\Longrightarrow a \in M)$.

Da M offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Dann enthält $U_\varepsilon(a)$ keinen Punkt aus $C(M)$, folglich ist a kein Häufungspunkt von $C(M)$. $\lightning$!

$(\longleftarrow)$ Sei $C(M)$ abgeschlossen und $a \in M$.
z.z.: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$.

Annahme: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) \nsubseteq M$,

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in U_\varepsilon(a)$ mit $x \notin M$, also $x \in C(M)$. Wegen $a \in M$ ist $x \neq a$. Folglich gibt es in jeder ε-Umgebung von a ein von a verschiedenes Element aus $C(M)$; somit ist a ein Häufungspunkt von $C(M)$. Da $C(M)$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muß a zu $C(M)$ gehören. $\lightning$! ❑