Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Beispiele (für stetige Funktionen)

(1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $f(\bar{x}) = c$ für jedes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (konstante Funktion). **6/2/4/1**
Aus der Definition folgt unmittelbar, daß f in $\mathbb{R}^n$ stetig ist.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := x + y$. **6/2/4/2**

Behauptung: f ist in $\mathbb{R}^2$ stetig.

Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$|f(x, y) - f(a, b)| = |x + y - (a + b)| = |x - a + y - b| \leq |x - a| + |y - b| := (\star)$.

g.z.z.: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für jedes $(x, y) \in D(f)$: Wenn $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, so $(\star) < \varepsilon$.

Es ist

$$|(x, y) - (a, b)| = |(x - a, y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Wählt man $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&|(x, y) - (a, b)| < \delta \\
&\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \\
&\Longrightarrow (x - a)^2,\ (y - b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \\
&\Longrightarrow |x - a|,\ |y - b| < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Also $|f(x, y) - f(a, b)| \leq (\star) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon$; damit leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ das Verlangte.