Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

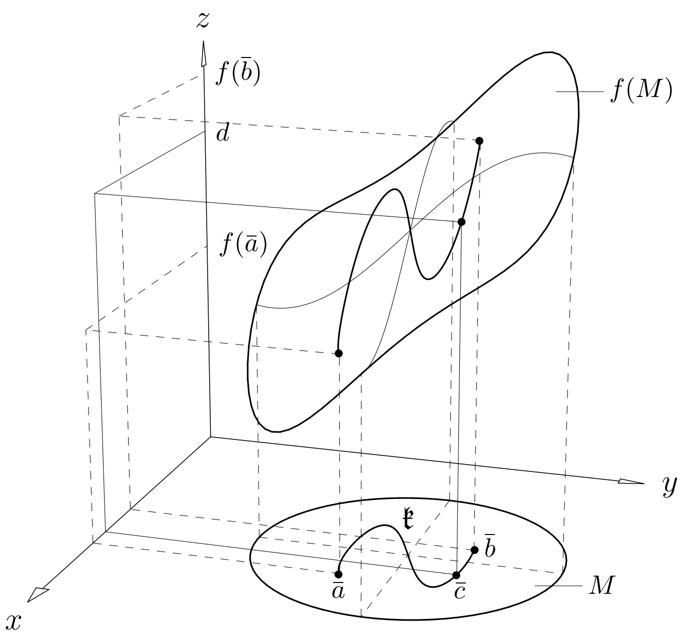

Abb. 6.12 Die Elemente $\bar{a}, \bar{b}$ sind durch eine Kurve $\mathfrak{k}$ verbunden. Die Funktion f, eingeschränkt auf die Menge $\mathfrak{k} \subseteq M$, erzeugt eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen, für die der Zwischenwertsatz schon gilt. An der Stelle $\bar{c}$ nimmt f den Wert d an. **6/3/8**

Beweis. Nach Voraussetzung sind $\bar{a}, \bar{b} \in M$ und M ist bogenzusammenhängend. **6/3/9**
Dann gibt es eine Kurve $\mathfrak{k}$, die ganz zu M gehört und $\bar{a}$ und $\bar{b}$ verbindet. Folglich existiert ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Funktion $g = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \le t \le b\} \subseteq M$, und $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$. Da $\bar{a}$ und $\bar{b}$ Bildelemente von g sind, existieren $a', b' \in [a, b]$, so daß $g(a') = \bar{a}$ und $g(b') = \bar{b}$.
Sei o.B.d.A. $a' < b'$.
Wegen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $W(g) = \mathfrak{k} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq D(f)$ ist $f \circ g$ in $[a, b]$ definiert.
Sei $h(t) := f(g(t))$, und somit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Wegen $[a', b'] \subseteq [a, b]$ ist h auch in $[a', b']$ definiert, und es gilt

$$h(a') = f\Big(\underbrace{g(a')}_{=\bar{a}}\Big) = f(\bar{a}) < d \quad \text{und}$$

$$h(b') = f\Big(\underbrace{g(b')}_{=\bar{b}}\Big) = f(\bar{b}) > d.$$

Da die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist h mit $h : [a', b'] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert *nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen* ein $c' \in (a', b')$, so daß $h(c') = d = f\Big(\underbrace{g(c')}_{:=\bar{c}}\Big)$.
$\bar{c} = g(c') \in \mathfrak{k} \subseteq M$ leistet das Verlangte. ❏