Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.13 *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $\bar{a} \in \mathbb{R}$. **6/3/11**
Ist f *in* $\bar{a}$ *stetig und* $f(\bar{a}) > 0$ (*bzw.* $f(\bar{a}) < 0$), *dann gibt es eine Umgebung* $U(\bar{a})$, *so daß* $f(\bar{x}) > 0$ (*bzw.* $f(\bar{x}) < 0$) *für alle* $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$.

Beweis. Sei $f(\bar{a}) > 0$ (den Fall $f(\bar{a}) < 0$ beweist man analog). **6/3/12**
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es für jede Umgebung $U(\bar{a})$ ein $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}) \leq 0$.
Für die Umgebungen $U(\bar{a}) := U_{\varepsilon_n}(\bar{a})$ mit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, existieren dann Elemente $\bar{x}_n \in U_{\varepsilon_n}(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}_n) \leq 0$.
Es entsteht also eine Folge $(\bar{x}_n)$ mit $\bar{x}_n \to \bar{a}$. Nach Voraussetzung ist f in $\bar{a}$ stetig, folglich existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = f(\bar{a})$. Wegen $f(\bar{x}_n) \leq 0$ erhält man aus Satz 3.10 (6) sofort $f(\bar{a}) = \lim f(\bar{x}_n) \leq 0$. $\lightning$! (Siehe hierzu auch die Abbildungen 6.8 a und 6.8 b) ❑