Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.14 *Es sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ist* f *in* M *stetig, und ist* M **6/3/16**
beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch $f(M)$ *beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f(M)$ beschränkt ist. **6/3/17**

Angenommen, $f(M)$ ist nicht beschränkt.
Dann gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\bar{x} \in M$, so daß $|f(\bar{x})| \geq c$.

Speziell für $c = c_i = i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ existieren dann Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \in M$, so daß $|f(\bar{x}_i)| \geq c_i = i$.
Wegen $\bar{x}_i \in M$ ist die Folge $(\bar{x}_i)$ beschränkt, folglich besitzt $(\bar{x}_i)$ einen Häufungspunkt $\bar{a}$ und eine gegen $\bar{a}$ konvergente Teilfolge $(\bar{x}_{i_j})$.
Wenn $\bar{x}_{i_j} = \bar{a}$ für ein j, dann ist $\bar{a} \in M$.
Wenn $\bar{x}_{i_j} \neq \bar{a}$ für alle j, dann ist $\bar{a}$ ein Häufungspunkt der Menge
$\{\bar{x}_{i_j} : j = 0, 1, 2, \ldots\}$, und damit ist auch $\bar{a} \in M$, denn M ist abgeschlossen.
Folglich ist f in $\bar{a}$ definiert und stetig. Wegen $\bar{x}_{i_j} \to \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a})$.
Andererseits ist $|f(\bar{x}_{i_j})| \geq c_{i_j} = i_j \longrightarrow \infty$. Daher ist $\Big(f(\bar{x}_{i_j})\Big)$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. ↯!

Wir zeigen nun, daß $f(M)$ abgeschlossen ist, d.h., ist b ein Häufungspunkt von $f(M)$, dann ist $b \in f(M)$.

Sei b ein Häufungspunkt von $f(M)$. Dann gibt es eine Folge (b_i) mit $b_i \in f(M)$ und $b_i \to b$. Wegen $b_i \in f(M)$ gibt es ein $\bar{x}_i \in M$, so daß $b_i = f(\bar{x}_i)$. Man erhält also eine Folge $(\bar{x}_i)$ in M, die beschränkt ist, da ja M beschränkt ist. Folglich besitzt $(\bar{x}_i)$ einen Häufungspunkt $\bar{a}$ und eine Teilfolge $(\bar{x}_{i_j})$, die gegen $\bar{a}$ konvergiert.
Wie im ersten Teil des Beweises ist $\bar{a} \in M$ und damit $f(\bar{a}) \in f(M)$, folglich ist f in $\bar{a}$ stetig.
Wegen $\bar{x}_{i_j} \to \bar{a}$ gilt: $b_{i_j} = f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) = b \implies$

$$f(\bar{a}) = b \in f(M). \qquad ❏$$