Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Stetigkeit in einer Menge ist immer punktweise Stetigkeit, d.h., eine Funktion f ist in einer Menge M stetig gdw f in jedem Punkt aus M stetig ist. **6/3/26**
Wir wollen jetzt anhand einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit von f in einer Menge M herausarbeiten, wobei man sich unter M ein Intervall vorstellen möge. (Wir wählen hierfür eine formale Schreibweise, um den Unterschied deutlicher hervortreten zu lassen.)

f ist in M stetig $\iff$
$\forall y \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\ \Big(|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big)$, und
f ist in M gleichmäßig stetig $\iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M\ \Big(|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big)$,
Bei der Stetigkeit in der Menge M hängt δ von ε und von der betrachteten Stelle $y \in M$ ab; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hängt δ nur von ε ab.
Wir werden jetzt zeigen, daß aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt, daß aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Hierbei beschränken wir uns wieder auf reellwertige Funktionen.