

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.17 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$. 6/3/30

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann ist f in M gleichmäßig stetig.

Beweis. Annahme: f ist in M nicht gleichmäßig stetig. 6/3/31

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in M$ existieren mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon$.

Wir wählen jetzt $\delta = \delta_i := \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Für δ_i existieren dann Elemente $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in M$ mit $|\bar{x}_i - \bar{y}_i| < \delta_i < \frac{1}{i}$ und $|f(\bar{x}_i) - f(\bar{y}_i)| \geq \varepsilon$.

Da M beschränkt ist, ist auch die Folge (\bar{x}_i) beschränkt. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge \bar{x}_{i_j} .

Da M abgeschlossen ist, gilt (analog wie im Beweis von Satz 6.14) $\bar{a} \in M$. Damit ist f in \bar{a} definiert und stetig.

Für die Teilfolge (\bar{y}_{i_j}) von (\bar{y}_i) gilt:

$$|\bar{y}_{i_j} - \bar{a}| \leq \underbrace{|\bar{y}_{i_j} - \bar{x}_{i_j}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\bar{x}_{i_j} - \bar{a}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} \implies \bar{y}_{i_j} \longrightarrow \bar{a}.$$

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ und $\bar{y}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) \quad \text{und} \quad f(\bar{y}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}).$$

Also

$$\underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{\geq \varepsilon} \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{a})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(\bar{a}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

falls j hinreichend groß ist. $\nexists!$ \square