

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

6/3/44

Zunächst führen wir eine neue Bezeichnung ein: Eine in \mathbb{R}^n abgeschlossene und beschränkte Menge nennen wir auch *kompakt*.

Wir werden den Kompaktheitsbegriff später noch präzisieren und zeigen, daß er in \mathbb{R}^n genau mit der obigen Bezeichnung zusammenfällt.

- (1) In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige Funktionen die Zwischenwerteigenschaft.
- (2) Ist eine stetige Funktion f an einer Stelle a positiv bzw. negativ, dann gibt es eine ganze Umgebung $U(a)$, so daß f in $U(a) \cap D(f)$ positiv bzw. negativ ist.
- (3) Ist M kompakt und f stetig in M , dann ist auch $f(M)$ kompakt.
- (4) Stetige Funktionen besitzen in kompakten Mengen ($\neq \emptyset$) ein Minimum und ein Maximum.
- (5) Funktionen, die in kompakten Mengen stetig sind, sind dort auch gleichmäßig stetig.
- (6) Lipschitz-Stetigkeit \implies gleichmäßige Stetigkeit \implies Stetigkeit.
 $\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$
- (7) Als wichtige Spezialfälle treten die entsprechenden Korollare für Funktionen einer Veränderlichen auf.