Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.20 *Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/52**
f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) $\iff$
f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert $(:= c_r)$ und einen linksseitigen Grenzwert $(:= c_l)$ und beide Werte sind gleich $(c_r = c_l = c)$.

Beweis. $(\longrightarrow)$ f habe in a den Grenzwert c. Dann gilt: **6/3/53**
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

$$Wenn\ |x-a| < \delta, \text{ so } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f,a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f,a) \subseteq D(f)$. Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a.

$(\longleftarrow)$ f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_r, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_l, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon.$$

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f,a) \cup D_l(f,a)}_{D(f)-\{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x-a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. ❑