Bei solchen Funktionen interessiert man sich häufig für das links- bzw. rechtsseitige Verhalten der Funktion an einer bestimmten Stelle $a \in \mathbb{R}$.

Im folgenden seien stets $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Abbildungen zeigen Beispiele für das Verhalten von f an einer Stelle.

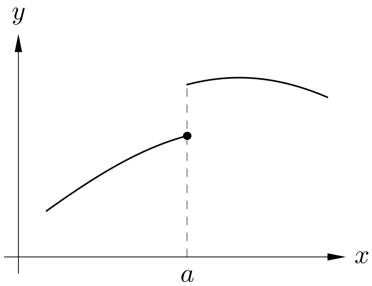

Abb. 6.16 a
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \le a, \\ h(x), & \text{für } x > a \end{cases}$$

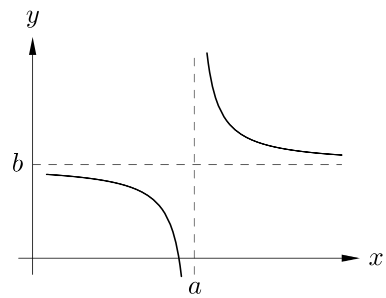

Abb. 6.16 b
$$f(x) = \frac{1}{x-a} + b$$

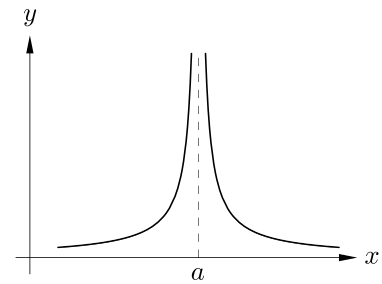

Abb. 6.16 c
$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$$

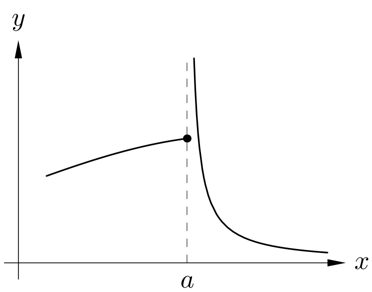

Abb. 6.16 d
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \le a, \\ \frac{1}{x-a}, & \text{für } x > a \end{cases}$$

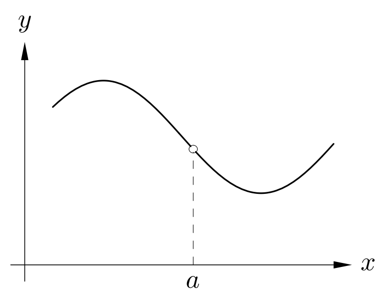

Abb. 6.16 e f ist an der Stelle a nicht definiert

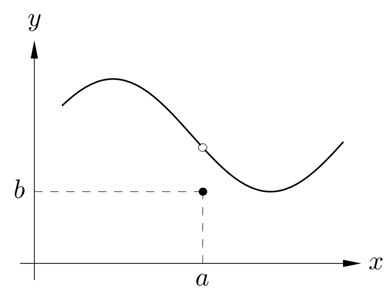

Abb. 6.16 f
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \ne a, \\ b, & \text{für } x = a \end{cases}$$

Diese Beispiele geben Anlaß zu folgenden Definitionen.

Definition. (*rechtsseitig* bzw. *linksseitig stetig*) **6/3/46**

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*
$\overset{=}{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \ge a$ (bzw. $x \le a$) gilt:
Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Analog läßt sich die links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbildung definieren. **6/3/47**

Definition. (*rechtsseitiger* bzw. *linksseitiger Grenzwert*) 6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$
bzw. von $D_l(f,a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.
f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c
$\overline{\overline{\text{Df}}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f,a)$ bzw.
für jedes $x \in D_l(f,a)$ gilt: Wenn $|x-a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = c$ bzw.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = c$

Beispiel. 6/3/49

Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

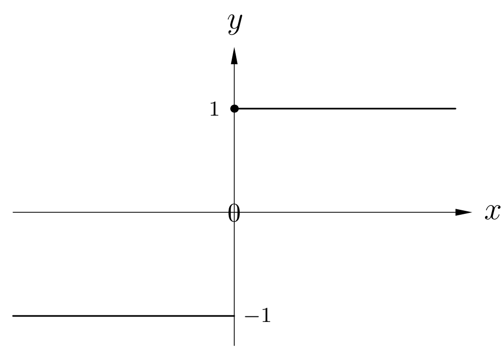

Abb. 6.17

An der Stelle $a = 0$ ist f rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.
Nach Definition ist $f(0) = 1$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und z.B. $\delta = \varepsilon$.
Dann gilt:
Für jedes $x \in D_r(f,0)$ (also $x > 0$) mit der Eigenschaft $|x - 0| < \delta$ ist
$|\underbrace{f(x)}_{=1} - \underbrace{f(0)}_{=1}| = 0 < \varepsilon$.
Aber z.B. für $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig gilt:
Wenn $x \in D_l(f,0)$ (also $x < 0$), so ist $|\underbrace{f(x)}_{=-1} - \underbrace{f(0)}_{=1}| = |-2| \geq \varepsilon$.

Andererseits besitzt f jedoch einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert: 1 bzw. -1, die voneinander verschieden sind, und außerdem ist der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 verschieden von dem Funktionswert $f(0)$.

Satz 6.19 *Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ bzw. von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* 6/3/50
f ist in a rechtsseitig bzw. linksseitig stetig $\iff$
$a \in D(f)$ und f besitzt in a den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert $f(a)$
$\iff$ *$a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:*
Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Beweis. Die Beweise führt man völlig analog wie die zu den Sätzen 5.2 und 5.3, wo die Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffs charakterisiert wurde. Man schränkt sich hier lediglich auf die linksseitige bzw. rechtsseitige Umgebung des Punktes a ein. ❑ **6/3/51**

Satz 6.20 *Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/52**
f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) $\iff$
f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert $(:= c_r)$ und einen linksseitigen Grenzwert $(:= c_l)$ und beide Werte sind gleich $(c_r = c_l = c)$.

Beweis. $(\longrightarrow)$ f habe in a den Grenzwert c. Dann gilt: **6/3/53**
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

$$Wenn\ |x-a| < \delta, \text{ so } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f,a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f,a) \subseteq D(f)$. Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a.

$(\longleftarrow)$ f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_r, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_l, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon.$$

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f,a) \cup D_l(f,a)}_{D(f)-\{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x-a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. ❑

Satz 6.21 *Sei f in a definiert und a sei ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/54**
f ist in a stetig $\iff$ f besitzt in a einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert und beide Werte sind gleich $f(a)$.

Beweis. f ist in a stetig $\iff$ **6/3/55**
f besitzt in a den Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 5.2) $\iff$
f besitzt in a den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 6.20). ❑

Korollar. *Sei f in a definiert und sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/56**
f ist in a stetig $\iff$ f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig.

Beweis. f ist in a stetig $\iff$ **6/3/57**
f besitzt in a den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$ $\iff$
f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig. (nach den Sätzen 6.21 und 6.19) ❑

Bemerkung. Für die verschiedenen „Typen“ von Grenzwerten sind insgesamt 15 Fälle möglich: **6/3/58**
Für $x \to a$, $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ besitzt f einen Grenzwert c bzw. den uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.