Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.4 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

Definition. (*hebbare Unstetigkeit*) **6/4/0**

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und f in a unstetig.
f besitzt in a eine *hebbare Unstetigkeit*
$\overset{=}{\text{Df}}$ Es existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Beispiele.

1. Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ **6/4/1/1**

Dann besitzt f in $a = 0$ eine hebbare Unstetigkeit. (vgl. Abb. 6.18 a)

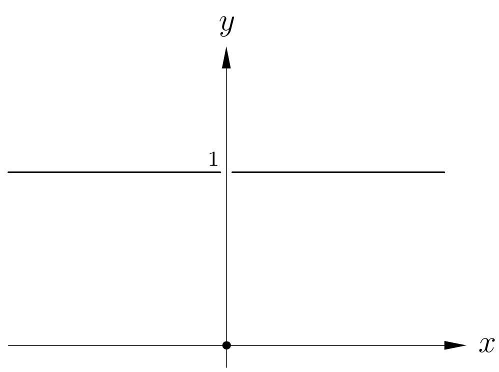

Abb. 6.18 a

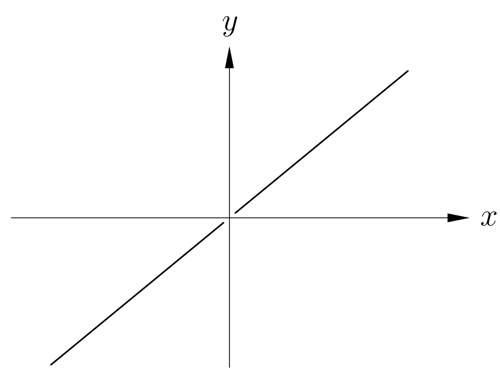

Abb. 6.18 b

2. Sei $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ (f ist in $x = 0$ nicht definiert!) **6/4/1/2**

Offenbar besitzt f in $a = 0$ eine hebbare Unstetigkeit, und

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 0, \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x), & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig in 0 (vgl. Abb. 6.18 b).

Definition. (*Sprungstelle* bzw. *Sprung*) **6/4/2**

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.
f besitzt in a einen *Sprung* (der Größe $d > 0$)
$\overset{=}{\text{Df}}$ f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r \neq c_l$ (und $d = |c_r - c_l|$).

a heißt dann auch *Sprungstelle*.

Ist z.B. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$ dann besitzt f an der Stelle 0 einen Sprung der **6/4/3**
Größe 2. (vgl. Abb. 6.17)

Definition. Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$, und sei f in a unstetig. **6/4/4**

(1) a ist *Unstetigkeitsstelle erster Art*

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ a ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle oder eine Sprungstelle.

(2) a ist *Unstetigkeitsstelle zweiter Art*

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ a ist **nicht** Unstetigkeitsstelle erster Art

(d.h., a ist Unendlichkeitsstelle oder rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert existieren nicht).

Beispiele. **6/4/5**

Die folgenden Abbildungen zeigen typische Beispiele für Unstetigkeitsstellen zweiter Art.

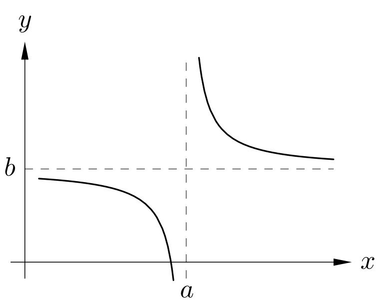

Abb. 6.19 a

Sei $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$.
a ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

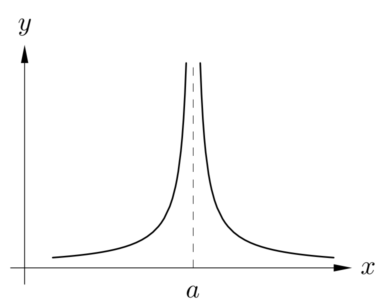

Abb. 6.19 b

Sei $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$.
a ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

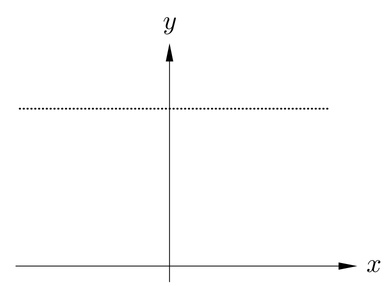

Abb. 6.19 c

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

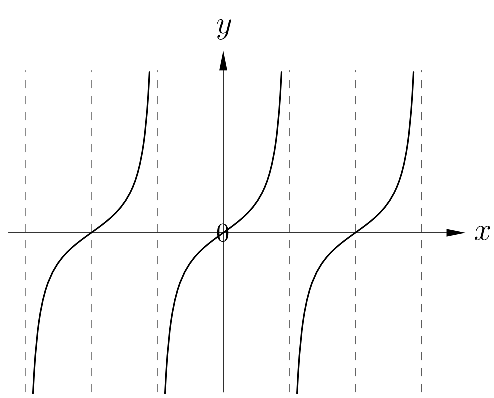

Abb. 6.19 d

Sei $f(x) = \tan x$.
An den Stellen $a = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, besitzt f Unstetigkeiten zweiter Art.

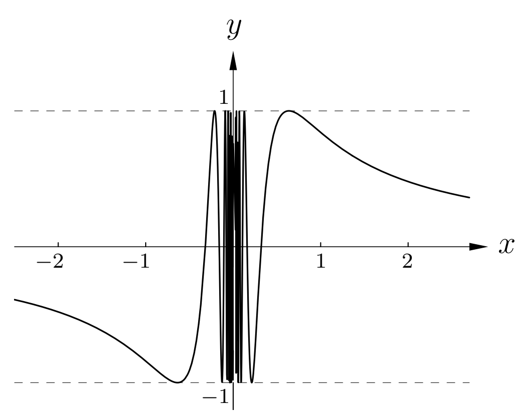

Abb. 6.19 e

Sei $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
An der Stelle $a = 0$ besitzt f eine Unstetigkeit zweiter Art.