Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Satz 6.23 *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. **6/5/7**
Ist M *kompakt* (im Sinne der Definition in metrischen Räumen)*, dann ist* M *beschränkt und abgeschlossen* (in $\mathbb{R}$)*.*

Beweis. Annahme: Es gilt nicht: M ist beschränkt und abgeschlossen. **6/5/8**
Dann ist M nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen.

Fall 1. M ist nicht beschränkt.

Dann gibt es eine unbeschränkte Folge $(\bar{x}_i)$ in M, so daß $|\bar{x}_{i+1}| \geq |\bar{x}_i| + 1$ für jedes i.

Sei $\mathcal{U} := \{U_{\frac{1}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$.

Offenbar ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Es gibt aber kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, durch das M überdeckt wird, denn jedes solche $\mathcal{U}_0$ könnte z.B. höchstens endlich viele der Folgeglieder überdecken, da diese zueinander einen Abstand der Größe wenigstens 1 haben. ↯!

Fall 2. M ist nicht abgeschlossen.

Dann gibt es einen Häufungspunkt $\bar{a}$ von M mit $\bar{a} \notin M$.

Für jedes $\bar{x} \in M$ ist somit $\bar{x} \neq \bar{a}$, also $|\bar{x} - \bar{a}| := \varepsilon_{\bar{x}} > 0$.
Folglich ist $\mathcal{U} := \{U_{\frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$ eine offene Überdeckung von M.

Behauptung: Kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ überdeckt M.

Ist $\mathcal{U}_0 = \{U_{\varepsilon_1}(\bar{x}_1), \ldots, U_{\varepsilon_m}(\bar{x}_m)\}$ ein beliebiges endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ und $\varepsilon_i := \varepsilon_{\frac{\bar{x}_i}{4}}$, dann sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\} = \min\{\frac{|\bar{x}-\bar{a}|}{4} : i = 1, \ldots, m\}$.
Folglich ist $U\varepsilon(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$ (vgl. Abb. 6.21).

Da $\bar{a}$ ein Häufungspunkt von M ist, existiert ein $\bar{y} \in M$, so daß $\bar{y} \in U_\varepsilon(\bar{a})$ und $\bar{y} \notin U_{\varepsilon_i}(\bar{x})$ für $i = 1, \ldots, m$, daher wird $\bar{y}$ durch $\mathcal{U}_0$ nicht überdeckt. Folglich gibt es kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, welches M überdeckt. ↯! ❑