Kapitel 6
Der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

In den bisherigen Ausführungen haben wir uns vorwiegend mit Funktionen einer reellen Veränderlichen befaßt. Für die praktischen Anwendungen der Analysis sind jedoch vor allem Funktionen mit mehreren reellen Veränderlichen von Bedeutung. Diesen Untersuchungen werden wir uns jetzt verstärkt widmen. **6/0**

6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten den n-dimensionalen Vektorraum **6/1/0**

$$\mathbb{R}^n := \{\bar{a} \,:\, a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}\}, \quad \bar{a} := (a_1,\ldots,a_n),$$

über $\mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen:
Addition in $\mathbb{R}^n$: $\bar{a}+\bar{b} \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$,
Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$: $r\cdot\bar{a} \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (ra_1,\ldots,ra_n)$.

Definition. (*euklidischer Abstand*) **6/1/1**
Seien $\bar{a},\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.
$|\bar{a}-\bar{b}| \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen $\bar{a}$ und $\bar{b}$.

Bemerkung. Für $\bar{b}=\bar{0}$ erhält man $|\bar{a}-\bar{0}| = |\bar{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. **6/1/2**
$|\bar{a}|$ ist also der Abstand zwischen $\bar{a}$ und $\bar{0}$ und heißt *Länge des Vektors* $\bar{a}$ oder auch *Betrag* von $\bar{a}$.

Definition. Der n-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n-dimensionaler euklidischer Raum*. **6/1/3**

Wir werden den euklidischen Raum ebenfalls mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. **6/1/4**
Offensichtlich sind die Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen Spezialfälle für ein- bzw. zweidimensionale euklidische Räume.

Satz 6.1 (*Schwarzsche Ungleichung*) **6/1/5**
Für beliebige reelle Zahlen a_i, b_i gilt:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2 \;\le\; \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big).$$

Beweis. In der linearen Algebra definiert man das Skalarprodukt für Vektoren **6/1/6**
$\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\bar{b}=(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}$ wie folgt: $(\bar{a},\bar{b}) := \sum_{i=1}^n a_ib_i$.

Man überlegt sich leicht, daß das so definierte Skalarprodukt folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}
&(\bar a,\bar a)=\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \geq 0, \text{ und } (\bar a,\bar a)>0, \text{ falls } \bar a\neq \bar 0,\\
&(\bar a,\bar b)=(\bar b,\bar a),\\
&(\bar a+\bar c,\bar b+\bar d)=(\bar a,\bar b)+(\bar a,\bar d)+(\bar c,\bar b)+(\bar c,\bar d),\\
&(r\cdot\bar a,\bar b)=r\cdot(\bar a,\bar b)=(\bar a,r\cdot\bar b) \text{ für alle } r\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Für beliebige $r\in\mathbb{R}$ erhält man hieraus

$$0\leq (r\cdot\bar a+\bar b, r\cdot\bar a+\bar b)=r^2\cdot(\bar a,\bar b)+(\bar b,\bar b).$$

Für $\bar a=\bar 0$ ist die Schwarzsche Ungleichung offenbar richtig.
Es sei jetzt $\bar a\neq\bar 0$ und damit $(\bar a,\bar a)>0$. Wählt man speziell $r=-\frac{(\bar a,\bar b)}{(\bar a,\bar a)}$, dann erhält man

$$0\leq \frac{(\bar a,\bar b)^2}{(\bar a,\bar a)}-\frac{2(\bar a,\bar b)^2}{(\bar a,\bar a)}+(\bar b,\bar b)=-\frac{(\bar a,\bar b)^2}{(\bar a,\bar a)}+(\bar b,\bar b).$$

Folglich ist

$$(\bar a,\bar b)\leq(\bar a,\bar a)\cdot(\bar b,\bar b),$$

und dies ist die Schwarzsche Ungleichung in etwas veränderter Schreibweise. ❏

Satz 6.2 *Für alle* $\bar a,\ \bar b,\ \bar c\in\mathbb{R}^n$ *und* $r\in\mathbb{R}$ *gilt:* **6/1/7**

(1) $|\bar a|\geq 0,$ *und* $|\bar a|=0 \iff \bar a=\bar 0.$

(2) $|r\cdot\bar a|=|r|\cdot|\bar a|.$
$(\Longrightarrow\ |-\bar a|=|\bar a|$ *und* $|\bar a-\bar b|=|\bar b-\bar a|).$ (Symmetrie des Abstands)

(3) $|\bar a+\bar b|\leq|\bar a|+|\bar b|.$ (Dreiecksungleichung)

(4) $|\bar a-\bar b|\leq|\bar a-\bar c|+|\bar c-\bar b|,$

(5) $\big||\bar a|-|\bar b|\big|\leq|\bar a-\bar b|.$

(4), (5): (Formen der Dreiecksungleichung)

Beweis. (1) und (2) sind trivial (analog wie für komplexe Zahlen). **6/1/8**
(3) wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung bewiesen (analog wie für komplexe Zahlen).
(4) und (5) folgen aus (3) wie bei den reellen Zahlen. ❏

Bemerkung. Unser Ziel ist es, in euklidischen Räumen Analysis zu betreiben (tiefergehende analytische Betrachtungen erfordern noch allgemeinere Räume, dies würde aber den Rahmen dieser Darstellung sprengen). Unabhängig von den betrachteten Räumen benötigt man bei einer ganzen Reihe von Grundbegriffen der Analysis weder Zahlen noch Tupel von Zahlen, oft reicht eine Menge (:= Punktmenge) und eine Abstandsdefinition zwischen den **6/1/9**

Punkten der Menge aus, um grundlegende Begriffe definieren zu können. Wenn dann in den konkreten Räumen, die wir betrachten (z.B. $\mathbb{R}^n$ für die verschiedenen n), ein Abstand definiert ist, so sind in diesen Räumen schon alle Begriffe gegeben, die allein mit dem Abstand definiert werden können. Die Konvergenz von Folgen ist z.B. ein solcher Begriff, der sich allein auf den Abstand zurückführen läßt. Um nicht in jedem euklidischen Raum die Konvergenz und andere Definitionen neu formulieren zu müssen, betrachten wir sog. *metrische Räume* (das sind Punktmengen mit einem Abstand).

Definition. (*metrischer Raum*) **6/1/10**

Es sei $\mathbb{M}$ eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a,b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

(1) $\varrho(a,b) \geq 0$, und $\varrho(a,b) = 0 \iff a = b$.
(2) $\varrho(a,b) = \varrho(b,a)$. (Symmetrie)
(3) $\varrho(a,b) \leq \varrho(a,c) + \varrho(c,b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in $\mathbb{M}$, und das Paar $(\mathbb{M}, \varrho)$ heißt *metrischer Raum.*

Bemerkung. Wir werden den metrischen Raum $(\mathbb{M}, \varrho)$ wie üblich auch einfach mit $\mathbb{M}$ bezeichnen. **6/1/11**

Offenbar hat der in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ definierte Abstand die Eigenschaften (1) – (3). Folglich sind $(\mathbb{R}, |\cdots|)$, $(\mathbb{C}, |\cdots|)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdots|)$ oder kurz $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ metrische Räume.

Im folgenden sei $(\mathbb{M}, \varrho)$ bzw. $\mathbb{M}$ stets ein metrischer Raum.

Definition. (ε-*Umgebung*) **6/1/12**

Es sei $a \in \mathbb{M}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.
$U_\varepsilon(a)$ heißt ε-*Umgebung* von a (in $\mathbb{M}$)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{M} : \varrho(x,a) < \varepsilon\}$.

Ist z.B. $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, so ist $U_\varepsilon(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon\}$ eine n-*dimensionale offene Kugel in* $\mathbb{R}^n$ mit dem Radius ε und dem Mittelpunkt $\bar{a}$. Für $n = 1, 2$ erhält man ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ bzw. eine offene Kreisscheibe (:=Kreis ohne Rand) in der Ebene (vgl. Abb. 6.1). **6/1/13**

Definition. (*offene Menge*) **6/1/14**

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.
M heißt *offen* (in $\mathbb{M}$)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes $a \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$.
(Mit jedem $a \in M$ gehört noch eine ganze ε-Umgebung zu M, vgl. auch Abb. 6.2.)

6/1/15

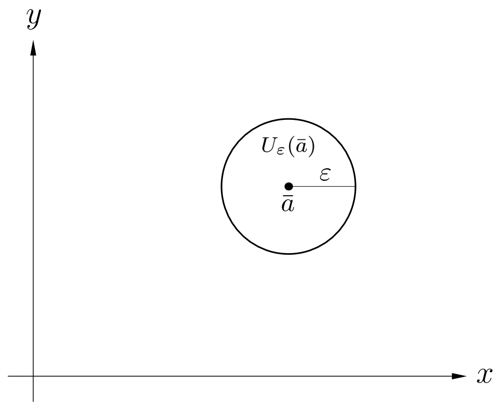


Abb. 6.1 zeigt eine ε-Umgebung in $\mathbb{R}^2$. Die Menge $\{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{a}| = \varepsilon\}$ gehört **nicht** zu $U_\varepsilon(\bar{a})$.

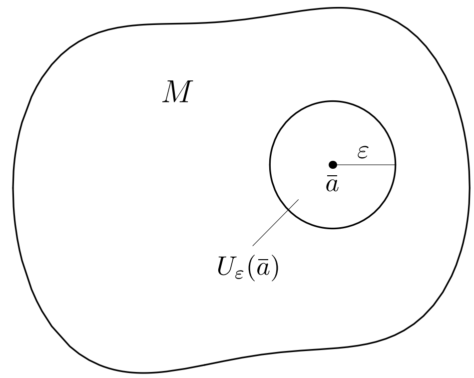


Abb. 6.2 Zu jedem $\bar{a} \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß auch noch $U_\varepsilon(\bar{a})$ zu der Menge M gehört.

Definition. (*Umgebung*) 6/1/16

Es sei $a \in \mathbb{M}$ und $U \subseteq \mathbb{M}$.

(1) U ist eine *offene Umgebung* von a

$\overset{=}{\text{Df}}$ U ist offen und $a \in U$.

(2) U ist eine *Umgebung* von a

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{M}$ mit $a \in U'$ und $U' \subseteq U$.

Bez.: $U := U(a)$

Bemerkung. Im praktischen Umgang kommt man fast immer mit den spezielleren ε-Umgebungen aus, denn jede ε-Umgebung ist eine Umgebung, und in jeder Umgebung von a ist eine ε-Umgebung von a enthalten (und dies reicht in der Regel aus). Es ist aber oft bequem, einfach von Umgebungen zu sprechen. 6/1/17

Definition. (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in $\mathbb{M}$)

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt: $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

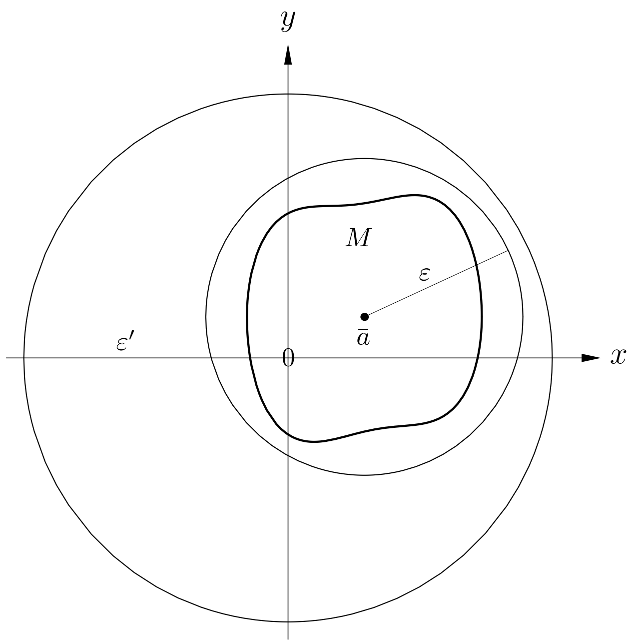


Abb. 6.3 Ist $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$, dann gibt es ein $\bar{a} \in M$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(\bar{a}) = \{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon\}$. Da $\mathbb{R}^n$ ein Nullelement enthält, kann in $\mathbb{R}^n$ stets $\bar{a} = \bar{0}$ gewählt werden (in beliebigen metrischen Räumen existiert keine Null!). Also $M \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{0})$ und somit $|\bar{x}| < \varepsilon'$ für jedes $\bar{x} \in M$. **6/1/19**

Definition. (*Häufungspunkt*) **6/1/20**

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.
a ist ein *Häufungspunkt* von M
$\overset{=}{\text{Df}}$ In jeder Umgebung von a liegt noch wenigstens ein von a verschiedener Punkt aus M.

Satz 6.3 *Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$. Ist a ein Häufungspunkt von M, dann liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte aus M.* **6/1/21**

Beweis. Der Beweis erfolgt analog wie für die reellen Zahlen (vgl. Satz 2.9). ❑ **6/1/22**

Es sei jetzt $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und $\varrho := |\cdots|$. **6/1/23**

Satz 6.4 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*) **6/1/24**

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus $\mathbb{R}^n$ besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit einer sog. Würfelschachtelung, die analog zu einer Intervallschachtelung induktiv konstruiert wird). **6/1/25**

Beweisidee: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und M unendlich und beschränkt. Dann läßt sich M in eine Kugel und damit auch in einen n-dimensionalen Würfel $W_0 := [a_1^0, b_1^0] \times \cdots \times [a_n^0, b_n^0]$ mit endlicher Kantenlänge einschließen, wobei $a_i^0, b_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i^0 < b_i^0$ und $b_i^0 - a_i^0 = b_j^0 - a_j^0$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Es gilt also $M \subseteq W_0$.

Die Kanten des Würfels werden durch die Intervalle $[a_i^0, b_i^0]$ auf den Koordinatenachsen repräsentiert (vgl. Abb. 6.4).

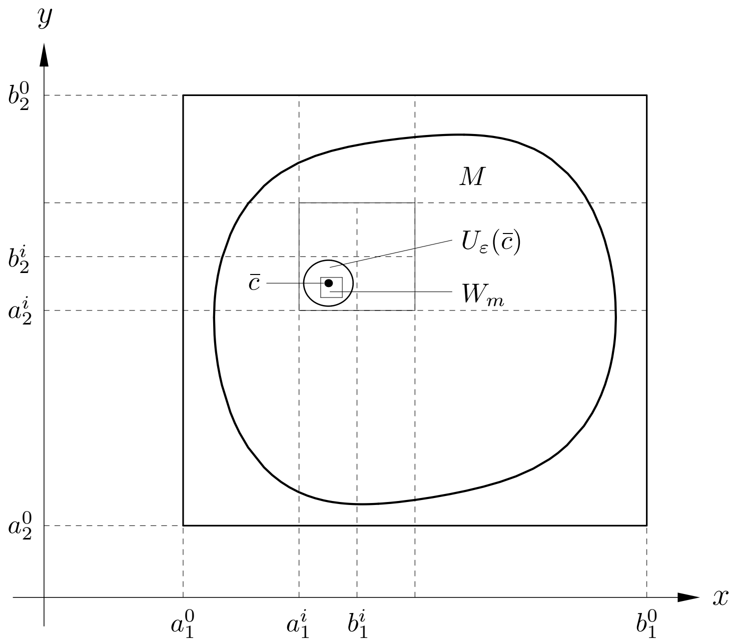


Abb. 6.4 In der Abbildung wird der Fall $n = 2$ dargestellt. Aufgrund der betrachteten Zerlegung gibt es bei jedem Schritt wenigstens einen Teilwürfel, in dem unendlich viele Elemente aus M enthalten sind; einen solchen Teilwürfel wählt man jeweils aus und zerlegt ihn weiter. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es dann einen Teilwürfel W_m, so daß $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$.

Durch Halbierung der Würfelkanten entsteht eine Zerlegung von W_0 in endlich viele Teilwürfel $W_0^1, \dots, W_0^k$, (in unserem Fall ist $k = 2^n$) und $W_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_0^i$.
Dann ist

$$M \cap W_0 = M \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} W_0^i \Big) = \bigcup_{i=1}^{k} (M \cap W_0^i)$$

unendlich. Folglich gibt es einen Teilwürfel W_0^i, so daß schon $M \cap W_0^i$ unendlich ist. Wir wählen einen solchen Teilwürfel W_0^i aus und nennen ihn W_1.
Es sei jetzt W_m schon definiert mit den fogenden Eigenschaften:
Die Kantenlänge von W_m ist $l(W_m) = \dfrac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ und $M \cap W_m$ ist unendlich.
Analog wie bei W_0 halbieren wir jetzt die Kanten von W_m und erhalten eine Zerlegung von W_m in k Teilwürfel $W_m^1, \dots, W_m^k$, so daß

$$W_m = \bigcup_{i=1}^{k} W_m^i \quad \text{und} \quad M \cap W_m = \bigcup_{i=1}^{k} (M \cap W_m^i).$$

Da nach Voraussetzung $M \cap W_m$ unendlich ist, existiert ein W_m^i, so daß $M \cap W_m^i$ unendlich ist; sei $W_{m+1} := W_m^i$.
Auf diese Weise entsteht eine Folge $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m \supseteq \cdots$ von ineinander geschachtelten Würfeln. Für den Würfel W_m sei die j-te Würfelkante $(j = 1, \dots, n)$ durch das Intervall $[a_j^m, b_j^m]$ gegeben. Offenbar ist $\Big([a_j^m, b_j^m]\Big)_{m=0,1,2,\dots}$ dann eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c_j, so daß $c_j \in [a_j^m, b_j^m]$ für fixiertes j mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $m = 0, 1, 2, \dots$.

Behauptung: $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ ist ein Häufungspunkt von M.

Offenbar ist $\bar{c} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W_m$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $l(W_m) = \dfrac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ kann mit wachsendem m die Kantenlänge des m-ten Würfels so klein gemacht werden, daß für hinreichend große m der ganze Würfel W_m zu $U_\varepsilon(\bar{c})$ gehört: $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$. Da $M \cap W_m \subseteq W_m$ und $M \cap W_m$ unendlich ist, liegen in $U_\varepsilon(\bar{c})$ unendlich viele Elemente aus M; folglich ist $\bar{c}$ ein Häufungspunkt von M. ❑

Definition. (*abgeschlossene Menge*) **6/1/26**
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*
$=_{\mathrm{Df}}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M.

Satz 6.5 *Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $C(M)$ das Komplement von M bez. $\mathbb{M}$.* **6/1/27**
Dann gilt: M ist offen gdw $C(M)$ abgeschlossen ist.

Beweis. $(\longrightarrow)$ Sei M offen und a ein Häufungspunkt von $C(M)$. **6/1/28**
z.z.: $a \in C(M)$.

Annahme: $a \notin C(M)$ $(\Longrightarrow a \in M)$.

Da M offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Dann enthält $U_\varepsilon(a)$ keinen Punkt aus $C(M)$, folglich ist a kein Häufungspunkt von $C(M)$. ↯!

$(\longleftarrow)$ Sei $C(M)$ abgeschlossen und $a \in M$.
z.z.: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$.

Annahme: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) \nsubseteq M$,

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in U_\varepsilon(a)$ mit $x \notin M$, also $x \in C(M)$. Wegen $a \in M$ ist $x \neq a$. Folglich gibt es in jeder ε-Umgebung von a ein von a verschiedenes Element aus $C(M)$; somit ist a ein Häufungspunkt von $C(M)$. Da $C(M)$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muß a zu $C(M)$ gehören. ↯! ❑

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:* **6/1/29**

(1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

(2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

(3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. Übungsaufgabe! **6/1/30**

Hinweise:

(1). Sei I eine Indexmenge und sei M_i für jedes $i \in I$ offen.
z.z.: $\bigcup_{i \in I} M_i$ ist offen.

(2). Analog zu (1), aber I endlich.

(3) und (4) folgen aus (1) und (2) mit Hilfe der *de Morganschen Formeln*:

$$C\Big(\bigcap_{i\in I} M_i\Big) = \bigcup_{i\in I} C(M_i) \quad \text{und} \quad C\Big(\bigcup_{i\in I} M_i\Big) = \bigcap_{i\in I} C(M_i) \qquad \text{(vgl. Aufgabe 3, Kapitel 1).} \qquad ❏$$

Weitere topologische Grundbegriffe **6/1/31**

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$. **6/1/32**

(1) a ist ein *innerer Punkt* von M
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ Es gibt eine Umgebung $U(a)$, die ganz zu M gehört.

(2) a ist ein *Randpunkt* von M
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ In jeder Umgebung von a existiert ein Punkt aus M und ein Punkt, der nicht zu M gehört.

(3) a ist ein *isolierter Punkt* von M
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ $a \in M$ und es gibt eine Umgebung von a, die außer a keinen weiteren Punkt aus M enthält.

6/1/33

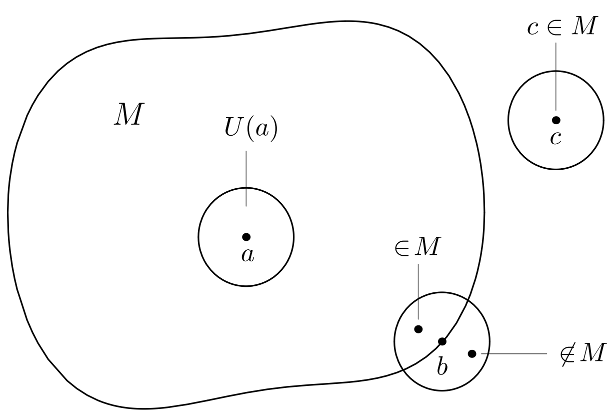


Abb. 6.5 a ist ein innerer Punkt von M, da mit a noch eine ganze Umgebung von a zu M gehört. b ist ein Randpunkt von M, denn in jeder Umgebung von b liegt ein Punkt aus M und ein Punkt, der nicht zu M gehört. c ist isolierter Punkt von M, denn $c \in M$, und es gibt eine Umgebung von c, in der kein weiterer Punkt aus M liegt.

Bemerkungen.

(1) Randpunkte von M müssen nicht zu M gehören.
(2) M ist offen gdw jeder Punkt aus M innerer Punkt von M ist.
(3) M ist abgeschlossen gdw der *Rand* von M (:= Menge aller Randpunkte von M) zu M gehört.
(4) Nicht jede Menge ist offen oder abgeschlossen.
(5) Es gibt Mengen, die offen und abgeschlossen sind.

Beweis. (1). Beispiel: Das Intervall $M = (0, 1)$ in $\mathbb{R}$. **6/1/34**
(2) ist nach Definition trivial.
(3). Randpunkte sind offenbar Häufungspunkte oder isolierte Punkte. Daraus folgt die

Behauptung.
(4). Beispiel: $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ und $M = [0, 1)$.
(5). Beispiel: $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}$ oder $M = \emptyset$. ❑

Wir betrachten jetzt Folgen (x_n) in $\mathbb{M}$, d.h., für jede natürliche Zahl n ist $x_n \in \mathbb{M}$.

Definition. (*Konvergenz in metrischen Räumen*) **6/1/35**

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.
(x_n) *konvergiert gegen* a (in $\mathbb{M}$)
$\overset{=}{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$
(d.h., für fast alle n ist der Abstand zwischen x_n und a kleiner als ε, oder in jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgeglieder).

Bez.: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ oder kurz $x_n \to a$.

Damit ist der Begriff der Konvergenz in metrischen Räumen definiert. Betrachtet man also einen speziellen metrischen Raum, etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ dann muß man dort die Konvergenz nicht neu definieren. **6/1/36**

Es sei jetzt $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und $(\bar{x}_i)$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, also $\bar{x}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ (n fixiert und $i = 0, 1, 2, \ldots$), und es sei $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Satz 6.7 *Ist* $(\bar{x}_i)$ *eine Folge in* $\mathbb{R}^n$ *und* $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, *dann gilt*: **6/1/37**
$(\bar{x}_i)$ *konvergiert gegen* $\bar{a}$ $\iff$ *für jedes* $k = 1, \ldots, n$ *konvergiert* $(x_{ki})_{i=0,1,2,\ldots}$ *gegen* a_k. (D.h., Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise Konvergenz.)

Beweis. Übungsaufgabe! ❑ **6/1/38**

Damit übertragen sich sehr viele Konvergenzeigenschaften für Folgen in $\mathbb{R}$ auf Folgen in $\mathbb{R}^n$; insbesondere gilt: **6/1/39**
Ist $(\bar{x}_i)$ in $\mathbb{R}^n$ beschränkt (:= die Menge $\{\bar{x}_i : i = 0, 1, 2, \ldots\}$ ist beschränkt), dann existiert ein Häufungspunkt $\bar{a}$ von $(\bar{x}_i)$ und eine Teilfolge $(\bar{x}_{i_j})$ von $(\bar{x}_i)$, die gegen $\bar{a}$ konvergiert.

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Funktionen mit mehreren Veränderlichen*) **6/2/0**

f ist eine *reellwertige Funktion mit* n *reellen Veränderlichen*
$\overset{=}{\text{Df}}$ $f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ $(:= \mathbb{R}^{n+1})$ und für jedes $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(\bar{a}, b) \in f$ (hierbei ist $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_n, b)$).

Bez.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f(\bar{a}) = b$.

Da die Werte dieser Funktionen reelle Zahlen sind, lassen sich die rationalen Operationen hierfür völlig analog wie bei Funktionen mit einer reellen Veränderlichen definieren. **6/2/1**
Eine anschauliche graphische Darstellung der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist für die Fälle $n \geq 3$ nicht mehr möglich. Für $n = 2$ erfolgt dies im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ (vgl. Abb. 6.6). Hierbei benutzt man in der Regel x, y als unabhängige Variablen und z als abhängige Variable.

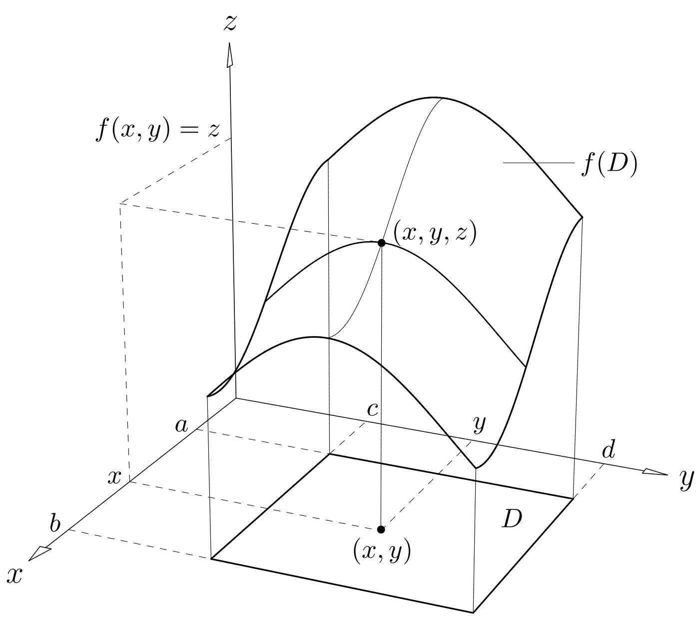


Abb. 6.6 Der Einfachheit wegen wird als Definitionsbereich von f ein Rechteck $D := [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ gewählt; $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$.
Für $f(x,y) = z$ kann man sich die Menge $\{(x,y,z) : (x,y) \in D\}$ bei einer stetigen Funktion f als „gekrümmte Fläche“ im Raum $\mathbb{R}^3$ vorstellen.

Die Verkettung $f \circ g$ für beliebige Funktionen $g : A \to B$ und $f : B \to C$ ist nur dann definiert, wenn $W(g) \subseteq D(f)$ (vgl. Kapitel 5, Operationen für Funktionen). Daraus ergibt sich sofort, daß sich reellwertige Funktionen nur in Spezialfällen verketten lassen, f müßte z.B. $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ abbilden.

Betrachtet man Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $m, n \geq 1$ und sonst beliebig sind (solche Funktionen heißen auch *Vektorfunktionen* und für $m = n$ auch *Vektorfelder*), dann läßt sich die Verkettung wieder allgemeiner ausführen.

Die oben betrachteten Funktionen sind wichtige Hilfsmittel zur Beschreibung der objektiven Realität mit Hilfe mathematischer Begriffe. Will man etwa das Gravitationsfeld der Erde durch eine Funktion f beschreiben, dann muß die Funktion f jedem Raumpunkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ die wirkende Schwerkraft $\bar{b}$ in diesem Punkt zuordnen. Die Kraft ist aber auch ein Vektor (aus $\mathbb{R}^3$), also ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, dann ist $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
Wenn nun $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_m$, so daß $g(\bar{x}) = (y_1, \ldots, y_m)$. Ist zusätzlich $(y_1, \ldots, y_m) \in D(f)$, dann ist auch f an der Stelle $(y_1, \ldots, y_m)$ definiert, folglich gibt es reelle Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ mit $f(y_1, \ldots, y_m) =$

$(z_1,\ldots,z_k)$, also $f(g(x_1,\ldots,x_n)) = (z_1,\ldots,z_k)$. Betrachtet man $\bar{x}$ als ein n-Tupel von Variablen x_i, dann lassen sich aus

$$g(\bar{x}) = (y_1,\ldots,y_m)$$

wie folgt m reellwertige Funktionen definieren:

$$g_1(\bar{x}) := y_1,\ \ldots\ ,\ g_m(\bar{x}) := y_m.$$

Setzt man diese in $f(y_1,\ldots,y_m)$ ein, so entsteht

$$f(y_1,\ldots,y_m) = f(g_1(\bar{x}),\ldots,g_m(\bar{x})) = (z_1,\ldots,z_k).$$

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schreiben wir auch $g := (g_1,\ldots,g_m)$ und schließlich

$$(f \circ g)(\bar{x}) = f(g(\bar{x})) = f\Big(g_1(\bar{x}),\ldots,g_m(\bar{x})\Big) = (z_1,\ldots,z_k).$$

Bevor wir uns der Stetigkeit und weiterer wichtiger Eigenschaften von Vektorfunktionen zuwenden, betrachten wir noch einen wichtigen Spezialfall für $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, nämlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, also $m = 1$. Mit solchen Funktionen lassen sich sehr elegant sogenannte *Kurven* in mehrdimensionalen Räumen darstellen.

Als Beispiel wählen wir $k = 2$ (vgl. Abb. 6.7).

In $\mathbb{R}^2$ sei ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $0 := (0,0)$ gegeben. Den Kreis kann man durch die Gleichung $x^2+y^2 = r^2$ beschreiben. Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Entsprechend des Vorzeichens entstehen zwei reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen, die jeweils den oberen bzw. den unteren Kreisbogen beschreiben. Der gesamte Kreisbogen läßt sich aber nicht durch eine reellwertige Funktion beschreiben. Ist (x,y) der in der Abbildung dargestellte Punkt auf dem Kreis und t der zugehörige Kreisbogen, dann ist offenbar

$$x := r\cdot\cos t \quad \text{und} \quad y := r\cdot\sin t.$$

Durchläuft t das Intervall $[0,2\pi]$, dann durchläuft

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) := (x,y) = (r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)$$

alle Punkte auf der gesamten Kreislinie; also das Bild

$$f([0,2\pi]) = \{(f_1(t), f_2(t))\ :\ t \in [0,2\pi]\}$$

zeigt den Kreis.

(Eine solche Darstellung des Kreises bezeichnet man auch als eine *Parameterdarstellung* des Kreises, das Intervall $[0,2\pi]$ heißt hierbei *Parameterintervall*. Wir werden uns mit diesen „Kurven“ noch genauer befassen.)

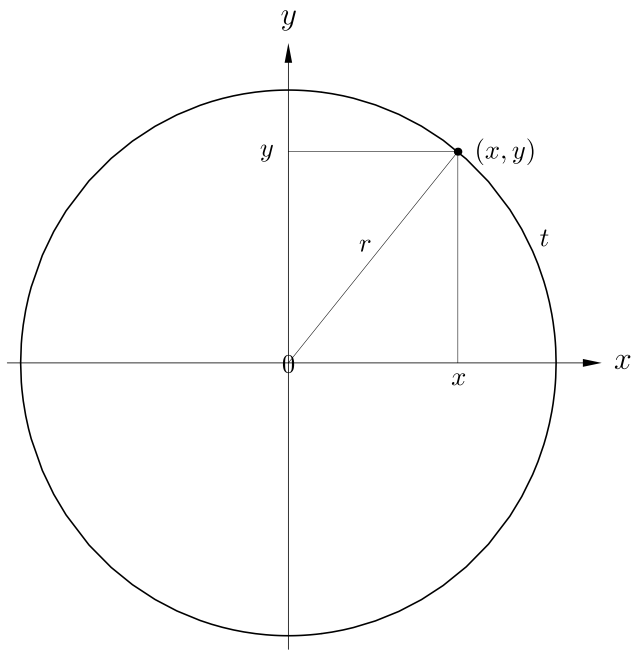


Abb. 6.7 Hier ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f = (f_1, f_2)$ und $f_1(t) = r \cos t = x$ und $f_2(t) = r \sin t = y$.
Achtung : In der Abbildung ist nur der Bildraum bzw. das Bild der Funktion f dargestellt. Die Funktion f selbst: $f = \{(t, f_1(t), f_2(t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ist eine Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}^3$. Sie läßt sich nur sehr schlecht graphisch veranschaulichen.

Bemerkung. Die wichtigsten Eigenschaften der Vektorfunktionen lassen sich aus den Eigenschaften ihrer Komponenten herleiten – diese Komponenten sind reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. Daher werden wir uns vorwiegend mit reellwertigen Funktionen befassen. Um aber nicht für jeden konkreten euklidischen Raum die Definitionen (und auch Sätze) immer wieder neu formulieren (bzw. beweisen) zu müssen, hatten wir metrische Räume eingeführt. Die Ergebnisse sind dann jeweils für den entsprechenden Spezialfall zu interpretieren.

Im folgenden seien $(\mathbb{M}_1, \varrho_1)$ und $(\mathbb{M}_2, \varrho_2)$ metrische Räume, die wir kurz mit $\mathbb{M}_1$ bzw. mit $\mathbb{M}_2$ bezeichnen. (Für unsere Zwecke können wir uns darunter immer $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ vorstellen.)

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*) **6/2/2**
Sei $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.
f ist in a *stetig*
$\overset{=}{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Wie für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen vereinbaren wir, daß eine **6/2/3**
Funktion f in einer Menge $M \subseteq \mathbb{M}_1$ stetig ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge stetig ist.

Ist z.B. $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}$ (mit dem euklidischen Abstand als Metrik) und ist $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, dann erhält man:
f ist in $\bar{a}$ stetig $\iff$ $\bar{a} \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

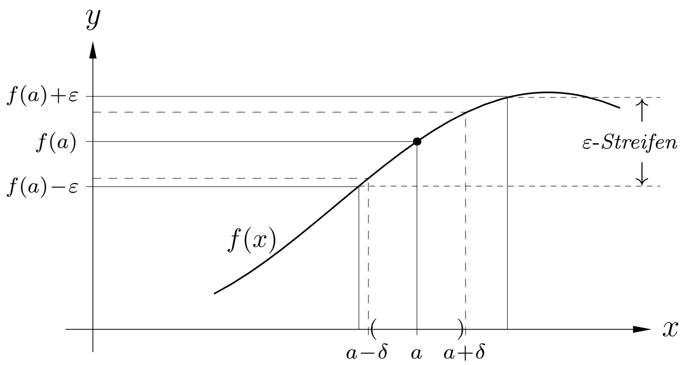


Abb. 6.8 a Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$; d.h., die Funktionswerte von f, eingeschränkt auf $U_\delta(a)$, liegen alle in dem ε-Streifen um $f(a)$.

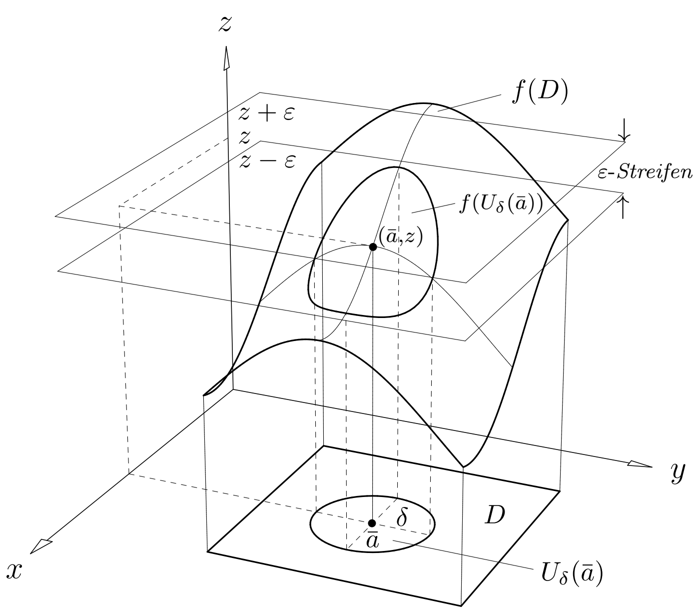


Abb. 6.8 b Ähnlich wie in der Abb. 6.6 betrachten wir eine Funktion f, die in dem Rechteckbereich D definiert ist. Weiterhin sei $\bar{a} \in D$, $f(\bar{a}) = z$ und $\varepsilon > 0$. Analog wie in der Abb. 6.8 a liegen die Funktionswerte von f, eingeschränkt auf $U_\delta(\bar{a})$, zwischen den beiden Ebenen, die parallel zur x-y-Ebene sind und durch die Punkte $(0,0,z-\varepsilon)$ bzw. $(0,0,z+\varepsilon)$ verlaufen.

Beispiele (für stetige Funktionen)

(1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $f(\bar{x}) = c$ für jedes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (konstante Funktion). **6/2/4/1**
Aus der Definition folgt unmittelbar, daß f in $\mathbb{R}^n$ stetig ist.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) := x + y$. **6/2/4/2**

Behauptung: f ist in $\mathbb{R}^2$ stetig.

Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$|f(x,y) - f(a,b)| = |x + y - (a+b)| = |x - a + y - b| \leq |x-a| + |y-b| := (\star)$.

g.z.z.: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für jedes $(x,y) \in D(f)$: Wenn $|(x,y) - (a,b)| < \delta$, so $(\star) < \varepsilon$.

Es ist

$$|(x,y) - (a,b)| = |(x-a, y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Wählt man $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|(x,y)-(a,b)|<\delta \\
&\iff (x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2=\frac{\varepsilon^2}{4} \\
&\Longrightarrow (x-a)^2,\ (y-b)^2<\frac{\varepsilon^2}{4} \\
&\Longrightarrow |x-a|,\ |y-b|<\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Also $|f(x,y)-f(a,b)| \le (\star) = |x-a|+|y-b|<\varepsilon$; damit leistet $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ das Verlangte.

Satz 6.8 *Sei* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f(\bar{x})=\big(f_1(\bar{x}),\dots,f_m(\bar{x})\big)$ *und* $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* **6/2/5**
f *ist in* $\bar{a}$ *stetig gdw* $f_1,\dots,f_m$ *in* $\bar{a}$ *stetig sind.*

(D.h., Stetigkeit bei Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit.)

Beweis. Zunächst gilt für beliebige Vektoren $\bar{c}=(c_1,\dots,c_k)$: **6/2/6**

$$|c_i|\le|\bar{c}|\le|c_1|+\dots+|c_k| \quad \text{für alle } i.$$

Denn

$$
\begin{aligned}
&|c_i|=\sqrt{c_i^2}\le\sqrt{c_1^2+\dots+c_k^2}=|\bar{c}|= \\
&|(c_1,0,\dots,0)+\dots+(0,\dots,0,c_i,0,\dots,0)+\dots+(0,\dots,0,c_k)|\le \\
&|(c_1,0,\dots,0)|+\dots+|(0,\dots,0,c_k)|=|c_1|+\dots+|c_k|.
\end{aligned}
$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.
($\longrightarrow$) Sei f in $\bar{a}$ stetig. Dann gilt:
Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so daß für jedes $\bar{x}\in D(f)$:
Wenn $|\bar{x}-\bar{a}|<\delta$, so $|f(\bar{x})-f(\bar{a})|<\varepsilon$.
Wegen $|f(\bar{x})-f(\bar{a})|=\Big|\big(f_1(\bar{x})-f_1(\bar{a}),\dots,f_m(\bar{x})-f_m(\bar{a})\big)\Big|$ erhält man nach den obigen Ausführungen

$$|f_i(\bar{x})-f_i(\bar{a})|\le|f(\bar{x})-f(\bar{a})|<\varepsilon \quad \text{für } i=1,\dots,m.$$

Also wenn $|\bar{x}-\bar{a}|<\delta$, so $|f_i(\bar{x})-f_i(\bar{a})|<\varepsilon$ für $i=1,\dots,m$.

($\longleftarrow$) Seien jetzt $f_1,\dots,f_m$ in $\bar{a}$ stetig. Dann gilt für $i=1,\dots,m$:
Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta_i>0$, so daß für jedes $\bar{x}\in D(f_i)$:
Wenn $|\bar{x}-\bar{a}|<\delta_i$, so $|f_i(\bar{x})-f_i(\bar{a})|<\frac{\varepsilon}{m}$.
Wir wählen $\delta:=\min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$; dann erhält man für $|\bar{x}-\bar{a}|<\delta$ sofort $|f_i(x)-f_i(\bar{a})|<\frac{\varepsilon}{m}$, also

$$|f(\bar{x})-f(\bar{a})|\le|f_1(\bar{x})-f_1(\bar{a})|+\dots+|f_m(\bar{x})-f_m(\bar{a})|<m\cdot\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon.$$

Folglich ist f in $\bar{a}$ stetig. ❏

Bemerkung. Aufgrund von Satz 6.8 können Stetigkeitsuntersuchungen für Vektorfunktionen zurückgeführt werden auf Stetigkeitsuntersuchungen für reellwertige Funktionen. **6/2/7**

Analog wie bei Funktionen einer reellen Veränderlichen läßt sich die Stetigkeit auch hier mit dem Grenzwertbegriff charakterisieren.

Definition. (*Grenzwert*) **6/2/8**

Sei $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $c \in \mathbb{M}_2$.
f besitzt in a den *Grenzwert* c
$\underset{\text{Df}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:
Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), c) < \varepsilon$.

Bez.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $\bar{a}$ ein Häufungspunkt von $D(f)$, dann gilt: **6/2/9**
f besitzt an der Stelle $\bar{a}$ den Grenzwert c $\iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ mit $\bar{x} \neq \bar{a}$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - c| < \varepsilon$.

Für reellwertige Funktionen lassen sich völlig analog wie im eindimensionalen Fall uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ definieren.

Satz 6.9 *Sei* $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$, a *ein Häufungspunkt von* $D(f)$ *und* $a \in D(f)$. **6/2/10**
Dann gilt: f *ist in* a *stetig gdw* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existiert und* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Beweis. Der Beweis kann völlig analog wie im Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geführt werden (vgl. Kapitel 5, Satz 5.2). Da hier aber neue Begriffe auftauchen, soll die Beweisidee noch einmal erläutert werden. **6/2/11**

($\longrightarrow$) Sei f in a stetig und $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Stetigkeit gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D(f)$ gilt:

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Damit ist nach Definition des Grenzwertes:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ (:= c).$$

($\longleftarrow$) Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dann ist nach der Definition des Grenzwertes offenbar auch f in a stetig. ❑

Bemerkung. Bei stetigen Funktionen können Limes und Funktion vertauscht werden: **6/2/12**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a),$$

insbesondere gilt für $x \to a$: $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(g(\lim x)) = f(g(a))$.

Satz 6.10 (*Folgenstetigkeit*) **6/2/13**

Sei $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *und* $a \in D(f)$.
f *ist in* a *stetig gdw für jede Folge* (x_i) *in* $\mathbb{M}_1$ *mit* $x_i \in D(f)$ *gilt*:
Wenn $x_i \to a_i$, *so* $f(x_i) \to f(a)$.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog wie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ❑ 6/2/14

Bemerkung. Für uns sind natürlich die Fälle $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}^m$ mit $m, n \geq 1$ 6/2/15
von besonderem Interesse, auf die wir uns jetzt beschränken wollen.

Satz 6.11 *In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die* 6/2/16
Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ abbilden!)

Beweis. Den Beweis führt man völlig analog wie für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 6/2/17
(Die obige Einschränkung für Produkte und Quotienten auf reellwertige Funktionen ist notwendig, da Produkt und Quotient von Vektoren i.a. nicht definiert sind.) ❑

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*Kurve*) 6/3/1

$\mathfrak{k}$ ist eine *Kurve* in $\mathbb{R}^n$

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und eine stetige Vektorfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} := \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.
(D.h., es gibt stetige Funktionen $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, so daß $f(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$ und $\mathfrak{k}$ das Bild der Funktion f in $\mathbb{R}^n$ ist.)

Diese Darstellung der Kurve heißt auch *Parameterdarstellung* mit Hilfe des *Parameterintervalls* $[a, b]$. Die Stetigkeit ist notwendig, damit die Kurve zu einer „durchgezogenen" Linie wird. 6/3/2

Zwei Punkte $\bar{a}$, $\bar{b}$ werden durch die Kurve $\mathfrak{k}$ *verbunden*, wenn $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$.

Beispiele.

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. 6/3/3/1

Wir betrachten $[a, b]$ als Parameterintervall und $\mathfrak{k} = \{(t, f(t)) : a \leq t \leq b\}$.
Dann ist die Funktion f (dargestellt im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$) genau die Kurve $\mathfrak{k}$, die sich mit Hilfe der Vektorfunktion $g = (g_1, g_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ beschreiben läßt, wobei $g_1(t) := t$ und $g_2(t) := f(t)$. (vgl. Abb. 6.9)

2. Es sei $f_1(t) := t \cdot \cos t$, $f_2(t) := t \cdot \sin t$ und $f = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. 6/3/3/2

Dann ist $\mathfrak{k} = \{(f_1(t), f_2(t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$, denn f ist eine stetige Vektorfunktion. (vgl. Abb. 6.10)

6/3/4

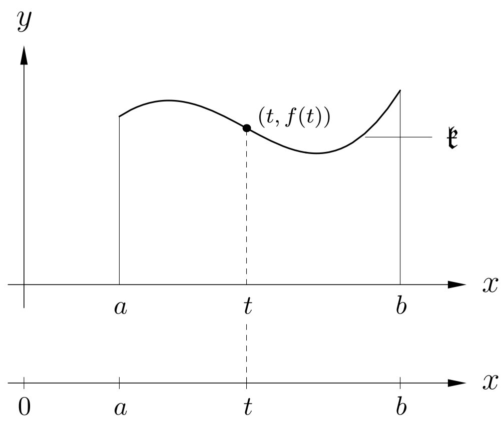


Abb. 6.9 Das Bild der Vektorfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) := (t, f(t))$ ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Es ist $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \leq t \leq b\}$.

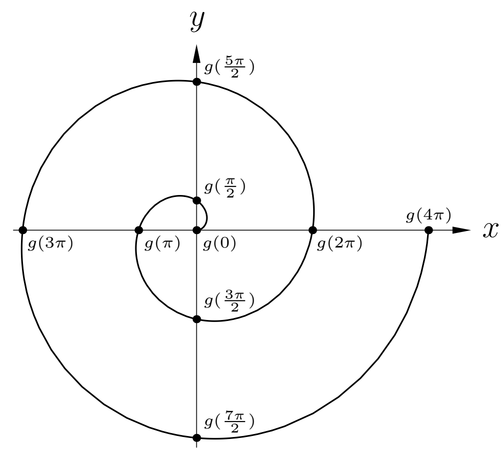


Abb. 6.10 Das Bild von $g : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (t \cos t, t \sin t)$ zeigt eine Spirale, die durch keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist.

Definition. (*bogenzusammenhängend*) 6/3/5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M ist *bogenzusammenhängend*
$\underset{\text{Df}}{=}$ Zu je zwei Punkten $\bar{a}, \bar{b} \in M$ gibt es eine Kurve $\mathfrak{k}$, die ganz zu M gehört und die Punkte $\bar{a}, \bar{b}$ miteinander verbindet. (vgl. Abb. 6.11 a)

6/3/6

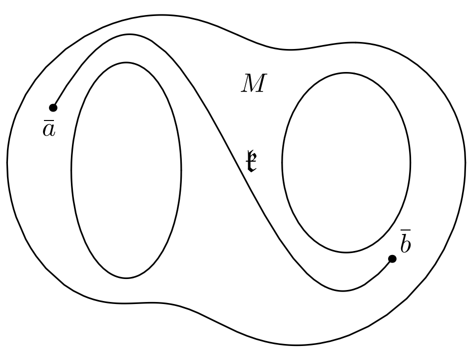


Abb. 6.11 a zeigt eine bogenzusammenhängende Menge, denn je zwei Punkte aus M lassen sich durch eine Kurve in M miteinander verbinden.

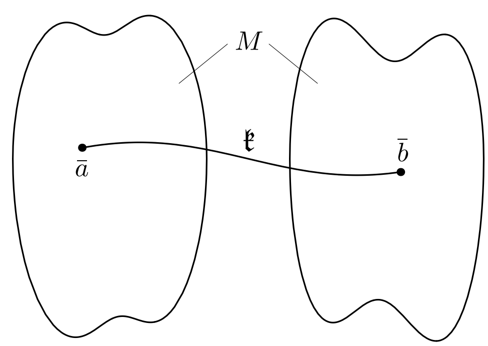


Abb. 6.11 b Die hier dargestellte Menge ist nicht bogenzusammenhängend, da es keine Kurve gibt, die $\bar{a}$ und $\bar{b}$ verbindet und ganz in M verläuft.

Satz 6.12 (*Zwischenwertsatz*) 6/3/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $M \subseteq D(f)$. *Dann gilt*:
Ist M *bogenzusammenhängend und* f *stetig in* M *und sind* $\bar{a}, \bar{b} \in M$, *so daß* $f(\bar{a}) < d < f(\bar{b})$, *dann gibt es ein* $\bar{c} \in M$, *so daß* $f(\bar{c}) = d$. (vgl. Abb. 6.12)

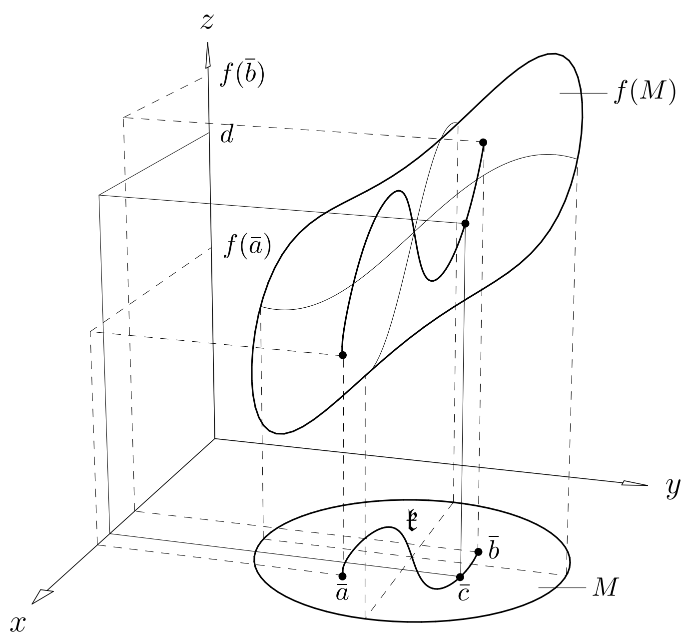


Abb. 6.12 Die Elemente $\bar{a}, \bar{b}$ sind durch eine Kurve $\mathfrak{k}$ verbunden. Die Funktion f, eingeschränkt auf die Menge $\mathfrak{k} \subseteq M$, erzeugt eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen, für die der Zwischenwertsatz schon gilt. An der Stelle $\bar{c}$ nimmt f den Wert d an. **6/3/8**

Beweis. Nach Voraussetzung sind $\bar{a}, \bar{b} \in M$ und M ist bogenzusammenhängend. **6/3/9**
Dann gibt es eine Kurve $\mathfrak{k}$, die ganz zu M gehört und $\bar{a}$ und $\bar{b}$ verbindet. Folglich existiert ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Funktion $g = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \leq t \leq b\} \subseteq M$, und $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$. Da $\bar{a}$ und $\bar{b}$ Bildelemente von g sind, existieren $a', b' \in [a, b]$, so daß $g(a') = \bar{a}$ und $g(b') = \bar{b}$.
Sei o.B.d.A. $a' < b'$.
Wegen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $W(g) = \mathfrak{k} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq D(f)$ ist $f \circ g$ in $[a, b]$ definiert.
Sei $h(t) := f(g(t))$, und somit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Wegen $[a', b'] \subseteq [a, b]$ ist h auch in $[a', b']$ definiert, und es gilt

$$h(a') = f\Big(\underbrace{g(a')}_{=\bar{a}}\Big) = f(\bar{a}) < d \quad \text{und}$$

$$h(b') = f\Big(\underbrace{g(b')}_{=\bar{b}}\Big) = f(\bar{b}) > d.$$

Da die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist h mit $h : [a', b'] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert *nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen* ein $c' \in (a', b')$, so daß $h(c') = d = f\Big(\underbrace{g(c')}_{:=\bar{c}}\Big)$.
$\bar{c} = g(c') \in \mathfrak{k} \subseteq M$ leistet das Verlangte. ❏

Bemerkung. In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige (reellwertige) Funktionen die Zwischenwerteigenschaft. **6/3/10**

Satz 6.13 *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $\bar{a} \in \mathbb{R}$. **6/3/11**

Ist f in $\bar{a}$ stetig und $f(\bar{a}) > 0$ (bzw. $f(\bar{a}) < 0$), dann gibt es eine Umgebung $U(\bar{a})$, so daß $f(\bar{x}) > 0$ (bzw. $f(\bar{x}) < 0$) für alle $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$.

Beweis. Sei $f(\bar{a}) > 0$ (den Fall $f(\bar{a}) < 0$ beweist man analog). **6/3/12**
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es für jede Umgebung $U(\bar{a})$ ein $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}) \leq 0$.
Für die Umgebungen $U(\bar{a}) := U_{\varepsilon_n}(\bar{a})$ mit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, existieren dann Elemente $\bar{x}_n \in U_{\varepsilon_n}(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}_n) \leq 0$.
Es entsteht also eine Folge $(\bar{x}_n)$ mit $\bar{x}_n \to \bar{a}$. Nach Voraussetzung ist f in $\bar{a}$ stetig, folglich existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = f(\bar{a})$. Wegen $f(\bar{x}_n) \leq 0$ erhält man aus Satz 3.10 (6) sofort $f(\bar{a}) = \lim f(\bar{x}_n) \leq 0$. $\lightning$! (Siehe hierzu auch die Abbildungen 6.8 a und 6.8 b) ❏

Definition. (*Beschränktheit bei Funktionen*) **6/3/13**
Sei $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq D(f)$.
(1) f ist in M *beschränkt*
$\quad \underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ $f(M) = \{f(a) : a \in M\}$ ist beschränkt.
(2) f ist *beschränkt*
$\quad \underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ f ist in $D(f)$ beschränkt.

Bemerkung. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $f(M)$ eine Menge von reellen Zahlen. Folglich gilt: **6/3/14**

$f(M)$ ist beschränkt $\iff$
$f(M)$ ist nach oben und nach unten beschränkt $\iff$
es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(\bar{x})| \leq c$ für jedes $\bar{x} \in M$.

Dann existieren $\sup f(M) := \sup\limits_{\bar{x}\in M} f(\bar{x})$ und $\inf f(M) := \inf\limits_{\bar{x}\in M} f(\bar{x})$.
Wenn $\sup f(M) \in f(M)$ bzw. $\inf f(M) \in f(M)$, dann sind $\sup f(M)$ bzw. $\inf f(M)$ das Maximum bzw. das Minimum von $f(M)$.

Bez.: $\max\limits_{\bar{x}\in M} f(\bar{x})$ bzw. $\min\limits_{\bar{x}\in M} f(\bar{x})$. **6/3/15**

Satz 6.14 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f in M stetig, und ist M beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch $f(M)$ beschränkt und abgeschlossen.* **6/3/16**

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f(M)$ beschränkt ist. **6/3/17**
Angenommen, $f(M)$ ist nicht beschränkt.
Dann gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\bar{x} \in M$, so daß $|f(\bar{x})| \geq c$.
Speziell für $c = c_i = i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ existieren dann Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \in M$, so daß $|f(\bar{x}_i)| \geq c_i = i$.
Wegen $\bar{x}_i \in M$ ist die Folge $(\bar{x}_i)$ beschränkt, folglich besitzt $(\bar{x}_i)$ einen Häufungspunkt $\bar{a}$ und eine gegen $\bar{a}$ konvergente Teilfolge $(\bar{x}_{i_j})$.

Wenn $\bar{x}_{i_j} = \bar{a}$ für ein j, dann ist $\bar{a} \in M$.
Wenn $\bar{x}_{i_j} \neq \bar{a}$ für alle j, dann ist $\bar{a}$ ein Häufungspunkt der Menge $\{\bar{x}_{i_j} : j = 0, 1, 2, \ldots\}$, und damit ist auch $\bar{a} \in M$, denn M ist abgeschlossen.
Folglich ist f in $\bar{a}$ definiert und stetig. Wegen $\bar{x}_{i_j} \to \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a})$.
Andererseits ist $|f(\bar{x}_{i_j})| \geq c_{i_j} = i_j \longrightarrow \infty$. Daher ist $\big(f(\bar{x}_{i_j})\big)$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. ↯!

Wir zeigen nun, daß $f(M)$ abgeschlossen ist, d.h., ist b ein Häufungspunkt von $f(M)$, dann ist $b \in f(M)$.
Sei b ein Häufungspunkt von $f(M)$. Dann gibt es eine Folge (b_i) mit $b_i \in f(M)$ und $b_i \to b$. Wegen $b_i \in f(M)$ gibt es ein $\bar{x}_i \in M$, so daß $b_i = f(\bar{x}_i)$. Man erhält also eine Folge $(\bar{x}_i)$ in M, die beschränkt ist, da ja M beschränkt ist. Folglich besitzt $(\bar{x}_i)$ einen Häufungspunkt $\bar{a}$ und eine Teilfolge $(\bar{x}_{i_j})$, die gegen $\bar{a}$ konvergiert.
Wie im ersten Teil des Beweises ist $\bar{a} \in M$ und damit $f(\bar{a}) \in f(M)$, folglich ist f in $\bar{a}$ stetig.
Wegen $\bar{x}_{i_j} \to \bar{a}$ gilt: $b_{i_j} = f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) = b \implies$

$$f(\bar{a}) = b \in f(M). \qquad \square$$

Korollar. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.* **6/3/18**
Ist f in $[a,b]$ stetig, dann ist f in $[a,b]$ beschränkt (und $f([a,b])$ ist abgeschlossen.)

Beweis. Der Beweis ist nach dem vorhergehenden Satz trivial. $\square$ **6/3/19**

Beispiel (dafür, daß der Satz nicht gilt, wenn M nicht abgeschlossen ist) **6/3/20**
$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $M = (0,1]$. Offenbar ist f in M nicht beschränkt.

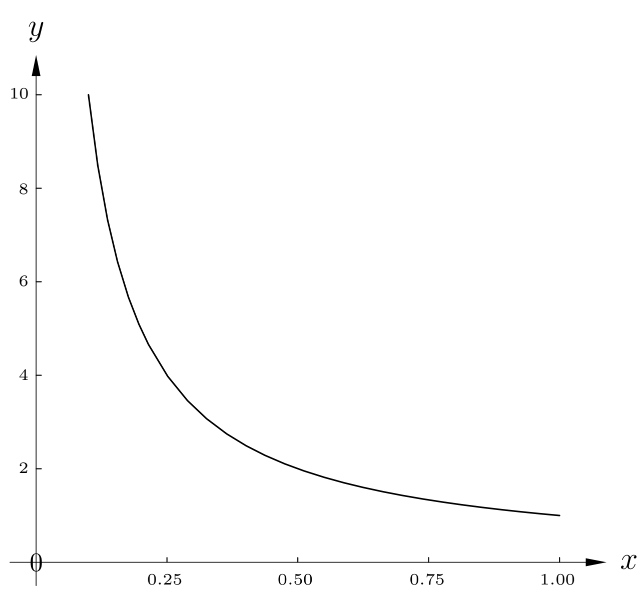


Abb. 6.13 f ist in $(0,1]$ offenbar nicht beschränkt. Für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $f(x) \to \infty$.
Die Maßstäbe für die x-Achse bzw. für die y-Achse wurden bewußt unterschiedlich gewählt, um das Anwachsen von f in der Nähe von 0 besser verdeutlichen zu können.

Satz 6.15 (*Satz von Weierstraß*) **6/3/21**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $M \neq \emptyset$. *Dann gilt:*
Ist f *in* M *stetig und* M *beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von* f *in* M (d.h., es gibt Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) = \min f(M)$ und $f(\bar{b}) = \max f(M)$).

Beweis. Wir zeigen, daß f in M ein Maximum besitzt; für das Minimum erfolgt der Beweis analog. **6/3/22**
Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ beschränkt, folglich existiert $\alpha := \sup f(M)$.
g.z.z.: $\alpha \in M$, denn dann ist α das Maximum von $f(M)$.
Annahme: $\alpha \notin f(M)$.
Wegen $\alpha = \sup f(M)$ ist dann $\alpha > f(\bar{x})$ für alle $\bar{x} \in M$.
Nach Definition des Supremums gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in f(M)$, so daß $\alpha > b > \alpha - \varepsilon$. Also in jeder ε-Umgebung von α liegt ein Punkt $b \in f(M)$ und $b \neq \alpha$; somit ist α ein Häufungspunkt von $f(M)$.
Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ abgeschlossen, folglich ist $\alpha \in f(M)$. ↯! ❑

Korollar. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $a < b$. **6/3/23**
Ist f *in* $[a, b]$ *stetig, dann gilt:*
(1) f *besitzt in* $[a, b]$ *ein Minimum und ein Maximum*
(d.h., es existieren $a', b' \in [a, b]$, so daß $f(a') = \max f([a, b])$ und $f(b') = \min f([a, b])$).
(2) $f([a, b]) = [\min\limits_{x \in [a,b]} f(x), \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)]$.

Beweis. (1) folgt direkt aus dem vorhergehenden Satz. **6/3/24**
(2). Minimum und Maximum von f sind Funktionswerte. Nach dem Zwischenwertsatz werden auch alle Zwischenwerte angenommen. ❑

Definition. (*gleichmäßige Stetigkeit*) **6/3/25**
Sei $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq \mathbb{M}_1$.
f ist in M *gleichmäßig stetig*
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $M \subseteq D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, y) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Stetigkeit in einer Menge ist immer punktweise Stetigkeit, d.h., eine Funktion f ist in einer Menge M stetig gdw f in jedem Punkt aus M stetig ist. **6/3/26**
Wir wollen jetzt anhand einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit von f in einer Menge M herausarbeiten, wobei man sich unter M ein Intervall vorstellen möge. (Wir wählen hierfür eine formale Schreibweise, um den Unterschied deutlicher hervortreten zu lassen.)
f ist in M stetig $\iff$

$\forall y \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\ \Big(|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big)$, und

f ist in M gleichmäßig stetig $\iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M\ \Big(|x-y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big)$,

Bei der Stetigkeit in der Menge M hängt δ von ε und von der betrachteten Stelle $y \in M$ ab; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hängt δ nur von ε ab.
Wir werden jetzt zeigen, daß aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt, daß aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Hierbei beschränken wir uns wieder auf reellwertige Funktionen.

Satz 6.16 *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $M \subseteq D(f)$. **6/3/27**
Ist f *in* M *gleichmäßig stetig, dann ist* f *in* M *stetig.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen. **6/3/28**

Es sei $\bar{a} \in M$.
g.z.z.: f ist in $\bar{a}$ stetig.

Wählt man in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit speziell $y = \bar{a}$, dann erhält man: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in M$ gilt:
Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$. ❑

Bemerkung. An einem Beispiel zeigen wir, daß die Umkehrung von Satz 6.16 im allgemeinen falsch ist. **6/3/29**
Dazu sei $M = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = \dfrac{1}{x}$, also $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.
Offenbar ist f als rationale Funktion stetig in $(0,1)$. f ist aber nicht gleichmäßig stetig in diesem Intervall. (vgl. Abb. 6.14)

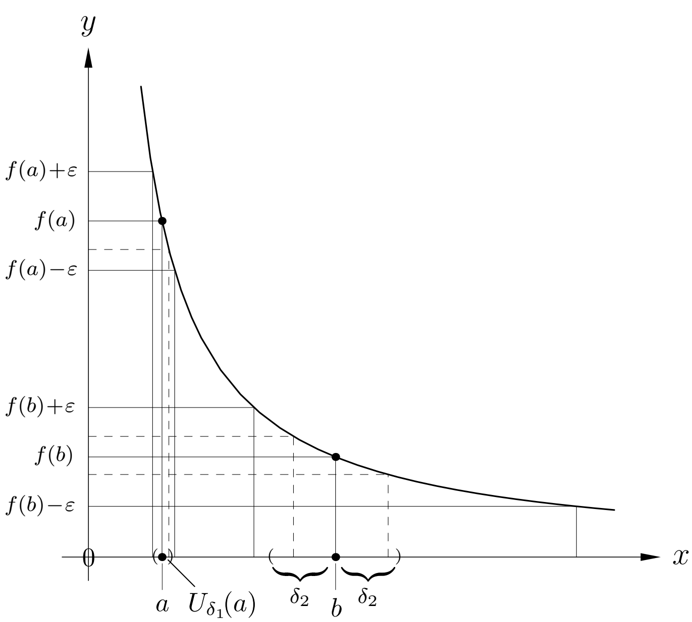


Abb. 6.14 Für das gleiche $\varepsilon > 0$ kann hier kein universelles $\delta > 0$ gewählt werden. Je näher man sich mit a dem Wert 0 nähert, desto kleiner muß die entsprechende δ-Umgebung genommen werden, damit die δ-Umgebung von a in die ε-Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. δ hängt sowohl von a als auch von ε ab.

Angenommen, f ist in $(0,1)$ gleichmäßig stetig.

Speziell für $\varepsilon = 1$ gäbe es dann ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in (0,1)$ gilt:
Wenn $|x-y| < \delta$, so $|f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1$.

Wählt man $x = \dfrac{1}{n}$ und $y = \dfrac{1}{2n}$, dann ist

$$|x-y| = \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\Big| = \frac{1}{2n} < \delta$$

für hinreichend große n und

$$|f(x) - f(y)| = \Big|f\Big(\frac{1}{n}\Big) - f\Big(\frac{1}{2n}\Big)\Big| = |n - 2n| = n \geq \varepsilon = 1. \qquad \lightning !$$

Satz 6.17 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.* **6/3/30**
Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann ist f in M gleichmäßig stetig.

Beweis. Annahme: f ist in M nicht gleichmäßig stetig. **6/3/31**

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in M$ existieren mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon$.

Wir wählen jetzt $\delta = \delta_i := \dfrac{1}{i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Für δ_i existieren dann Elemente $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in M$ mit $|\bar{x}_i - \bar{y}_i| < \delta_i < \frac{1}{i}$ und $|f(\bar{x}_i) - f(\bar{y}_i)| \geq \varepsilon$.

Da M beschränkt ist, ist auch die Folge $(\bar{x}_i)$ beschränkt. Folglich besitzt $(\bar{x}_i)$ einen Häufungspunkt $\bar{a}$ und eine gegen $\bar{a}$ konvergente Teilfolge $\bar{x}_{i_j}$.

Da M abgeschlossen ist, gilt (analog wie im Beweis von Satz 6.14) $\bar{a} \in M$. Damit ist f in $\bar{a}$ definiert und stetig.

Für die Teilfolge $(\bar{y}_{i_j})$ von $(\bar{y}_i)$ gilt:

$$|\bar{y}_{i_j} - \bar{a}| \leq |\underbrace{\bar{y}_{i_j} - \bar{x}_{i_j}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ j\to\infty}}| + |\underbrace{\bar{x}_{i_j} - \bar{a}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ j\to\infty}}| \quad \Longrightarrow \quad \bar{y}_{i_j} \longrightarrow \bar{a}.$$

Wegen $\bar{x}_{i_j} \to \bar{a}$ und $\bar{y}_{i_j} \to \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) \quad \text{und} \quad f(\bar{y}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}).$$

Also

$$\underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{\geq \varepsilon} \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{a})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(\bar{a}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

falls j hinreichend groß ist. $\lightning !$ ❏

Korollar. *Ist f in $[a,b]$ stetig, dann ist f in $[a,b]$ gleichmäßig stetig.* **6/3/32**

Beweis. Da $M := [a,b]$ beschränkt und abgeschlossen ist, folgt die Behauptung sofort **6/3/33**
aus Satz 6.17. ❏

Satz 6.18 *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $M \subseteq D(f)$. **6/3/34**
Existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, *so daß für jedes* $\bar{x}, \bar{y} \in M$ *gilt:*
$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$, *dann ist* f *in* M *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $c > 0$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in M$. **6/3/35**
Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.
Dann gilt für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in M$ mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta = \frac{\varepsilon}{c}$:

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}| < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Folglich ist f in M gleichmäßig stetig. ❑

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*) **6/3/36**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
f ist in M *Lipschitz-stetig*
$\underset{\text{Df}}{=}$ $M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

Satz 6.18 besagt also, daß aus der Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt. **6/3/37**

Korollar. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **6/3/38**
Ist f *in* $[a, b]$ *Lipschitz-stetig, dann ist* f *in* $[a, b]$ *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Trivial. ❑ **6/3/39**

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 6.18 gilt im allgemeinen nicht. **6/3/40**

Beispiel: Sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. **6/3/41**
Als Wurzelfunktion ist f in $[a, b]$ stetig. Da $[0, 1]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f in $[0, 1]$ auch gleichmäßig stetig.
Angenommen, f ist in $[0, 1]$ Lipschitz-stetig.
Dann gibt es ein $c > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Insbesondere für $y = 0$ und $x \in (0, 1]$ beliebig gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq c \cdot |x - 0| = c \cdot x.$$

Also $\sqrt{x} \leq c \cdot x$ und damit $x \leq c^2 \cdot x^2 \implies 1 \leq c^2 \cdot x$ für alle $x \in (0, 1]$. Schließlich folgt $\frac{1}{c^2} \leq x$ für alle $x \in (0, 1]$. $\lightning$!

Bemerkung. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f in M erhält man für $x, y \in M$ und $x \neq y$: **6/3/42**

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq c,$$

d.h., der sog. *Differenzenquotient*, der uns noch in der Differentialrechnung begegnen wird, ist in M durch c beschränkt.

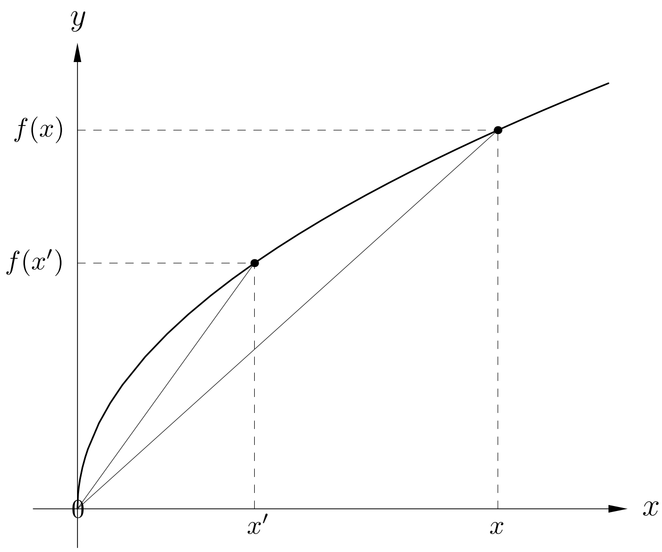


Abb. 6.15 Der Anstieg der Sekante zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(x, f(x))$ mit $x > 0$ ist gegeben durch $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Für $f(x) = \sqrt{x}$ erhält man daraus $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn $x \to 0$ und $x > 0$, so ist $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ offenbar nicht beschränkt.

Bemerkung. Lipschitz-Stetigkeit $\Longrightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit. **6/3/43**
Die Umkehrung gilt in all diesen Fällen nicht.

Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **6/3/44**

Zunächst führen wir eine neue Bezeichnung ein: Eine in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossene und beschränkte Menge nennen wir auch *kompakt*.
Wir werden den Kompaktheitsbegriff später noch präzisieren und zeigen, daß er in $\mathbb{R}^n$ genau mit der obigen Bezeichnung zusammenfällt.

(1) In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige Funktionen die Zwischenwerteigenschaft.
(2) Ist eine stetige Funktion f an einer Stelle a positiv bzw. negativ, dann gibt es eine ganze Umgebung $U(a)$, so daß f in $U(a) \cap D(f)$ positiv bzw. negativ ist.
(3) Ist M kompakt und f stetig in M, dann ist auch $f(M)$ kompakt.
(4) Stetige Funktionen besitzen in kompakten Mengen ($\neq \emptyset$) ein Minimum und ein Maximum.
(5) Funktionen, die in kompakten Mengen stetig sind, sind dort auch gleichmäßig stetig.
(6) Lipschitz-Stetigkeit $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ gleichmäßige Stetigkeit $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ Stetigkeit.
(7) Als wichtige Spezialfälle treten die entsprechenden Korollare für Funktionen einer Veränderlichen auf.

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir nur noch reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen. **6/3/45**

Bei solchen Funktionen interessiert man sich häufig für das links- bzw. rechtsseitige Verhalten der Funktion an einer bestimmten Stelle $a \in \mathbb{R}$.

Im folgenden seien stets $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Abbildungen zeigen Beispiele für das Verhalten von f an einer Stelle.

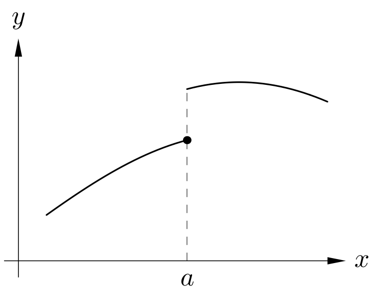


Abb. 6.16 a
$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \le a, \\ h(x), & \text{für } x > a \end{cases}$

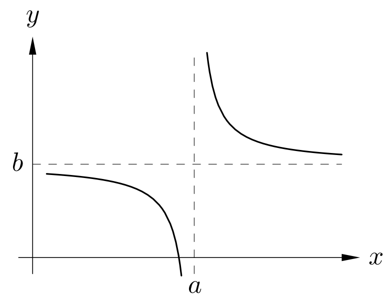


Abb. 6.16 b
$f(x) = \frac{1}{x-a} + b$

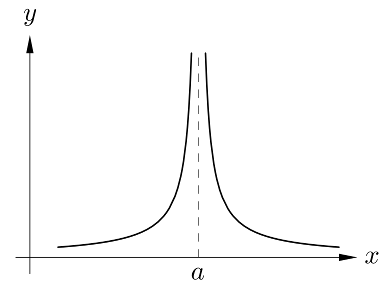


Abb. 6.16 c
$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$

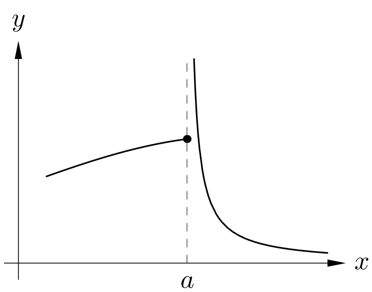


Abb. 6.16 d
$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \le a, \\ \frac{1}{x-a}, & \text{für } x > a \end{cases}$

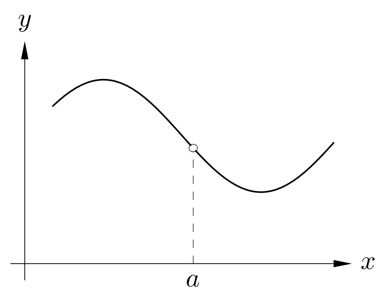


Abb. 6.16 e f ist an der Stelle a nicht definiert

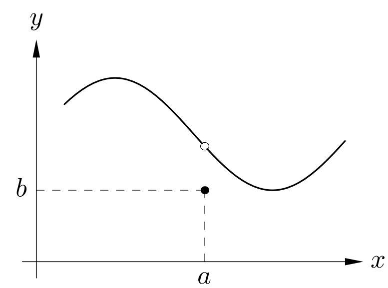


Abb. 6.16 f
$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \ne a, \\ b, & \text{für } x = a \end{cases}$

Diese Beispiele geben Anlaß zu folgenden Definitionen.

Definition. (*rechtsseitig* bzw. *linksseitig stetig*) **6/3/46**

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*
$\overset{=}{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \ge a$ (bzw. $x \le a$) gilt:
Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Analog läßt sich die links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbildung definieren. **6/3/47**

Definition. (*rechtsseitiger* bzw. *linksseitiger Grenzwert*) **6/3/48**

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$
bzw. von $D_l(f,a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.
f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c
$\overset{=}{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f,a)$ bzw. für jedes $x \in D_l(f,a)$ gilt: Wenn $|x-a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = c$ bzw.

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = c$

Beispiel. **6/3/49**

Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

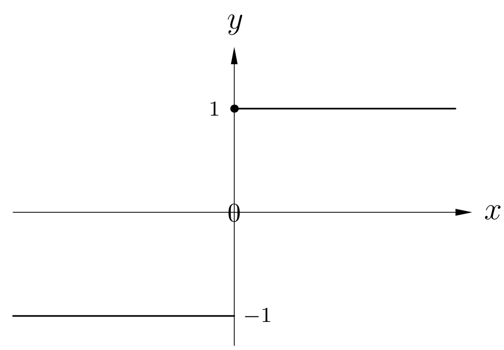


Abb. 6.17

An der Stelle $a = 0$ ist f rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.
Nach Definition ist $f(0) = 1$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und z.B. $\delta = \varepsilon$.
Dann gilt:
Für jedes $x \in D_r(f,0)$ (also $x > 0$) mit der Eigenschaft $|x - 0| < \delta$ ist
$|\underbrace{f(x)}_{=1} - \underbrace{f(0)}_{=1}| = 0 < \varepsilon$.
Aber z.B. für $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig gilt:
Wenn $x \in D_l(f,0)$ (also $x < 0$), so ist $|\underbrace{f(x)}_{=-1} - \underbrace{f(0)}_{=1}| = |-2| \geq \varepsilon$.

Andererseits besitzt f jedoch einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert: 1 bzw. -1, die voneinander verschieden sind, und außerdem ist der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 verschieden von dem Funktionswert $f(0)$.

Satz 6.19 *Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ bzw. von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/50**
f ist in a rechtsseitig bzw. linksseitig stetig $\iff$
$a \in D(f)$ und f besitzt in a den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert $f(a)$
$\iff$ *$a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:*
Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Beweis. Die Beweise führt man völlig analog wie die zu den Sätzen 5.2 und 5.3, wo die Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffs charakterisiert wurde. Man schränkt sich hier lediglich auf die linksseitige bzw. rechtsseitige Umgebung des Punktes a ein. ❑ **6/3/51**

Satz 6.20 *Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/52**
f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) $\iff$
f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert $(:= c_r)$ und einen linksseitigen Grenzwert $(:= c_l)$ und beide Werte sind gleich $(c_r = c_l = c)$.

Beweis. $(\longrightarrow)$ f habe in a den Grenzwert c. Dann gilt: **6/3/53**
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

$$Wenn\ |x-a| < \delta, \text{ so } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f,a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f,a) \subseteq D(f)$. Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a.

$(\longleftarrow)$ f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_r, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f,a)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_l, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon.$$

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f,a) \cup D_l(f,a)}_{D(f)-\{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x-a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. ❑

Satz 6.21 *Sei f in a definiert und a sei ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/54**
f ist in a stetig $\iff$ f besitzt in a einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert und beide Werte sind gleich $f(a)$.

Beweis. f ist in a stetig $\iff$ **6/3/55**
f besitzt in a den Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 5.2) $\iff$
f besitzt in a den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 6.20). ❑

Korollar. *Sei f in a definiert und sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f,a)$ und von $D_l(f,a)$. Dann gilt:* **6/3/56**
f ist in a stetig $\iff$ f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig.

Beweis. f ist in a stetig $\iff$ 6/3/57
f besitzt in a den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$ $\iff$
f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig. (nach den Sätzen 6.21 und 6.19) ❑

Bemerkung. Für die verschiedenen „Typen“ von Grenzwerten sind insgesamt 15 Fälle möglich: 6/3/58
Für $x \to a$, $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ besitzt f einen Grenzwert c bzw. den uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.

6.4 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

Definition. (*hebbare Unstetigkeit*) 6/4/0
Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und f in a unstetig.
f besitzt in a eine *hebbare Unstetigkeit*
$\underset{\text{Df}}{=}$ Es existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Beispiele.

1. Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ 6/4/1/1

Dann besitzt f in $a = 0$ eine hebbare Unstetigkeit. (vgl. Abb. 6.18 a)

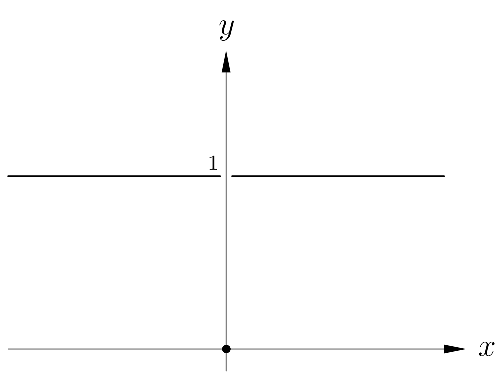


Abb. 6.18 a

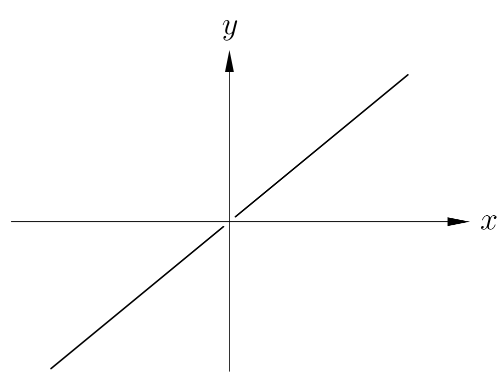


Abb. 6.18 b

2. Sei $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ (f ist in $x = 0$ nicht definiert!) 6/4/1/2

Offenbar besitzt f in $a = 0$ eine hebbare Unstetigkeit, und

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 0, \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x), & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig in 0 (vgl. Abb. 6.18 b).

Definition. (*Sprungstelle* bzw. *Sprung*) **6/4/2**

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.
f besitzt in a einen *Sprung* (der Größe $d > 0$)
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r \neq c_l$ (und $d = |c_r - c_l|$).

a heißt dann auch *Sprungstelle*.

Ist z.B. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$ dann besitzt f an der Stelle 0 einen Sprung der **6/4/3**
Größe 2. (vgl. Abb. 6.17)

Definition. Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$, und sei f in a unstetig. **6/4/4**

(1) a ist *Unstetigkeitsstelle erster Art*
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ a ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle oder eine Sprungstelle.

(2) a ist *Unstetigkeitsstelle zweiter Art*
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ a ist **nicht** Unstetigkeitsstelle erster Art
(d.h., a ist Unendlichkeitsstelle oder rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert existieren nicht).

Beispiele. **6/4/5**

Die folgenden Abbildungen zeigen typische Beispiele für Unstetigkeitsstellen zweiter Art.

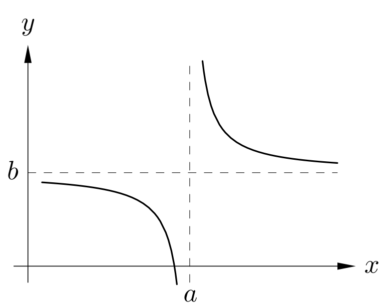


Abb. 6.19 a
Sei $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$.
a ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

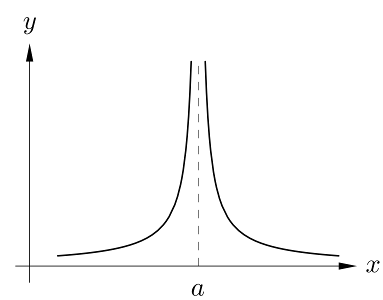


Abb. 6.19 b
Sei $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$.
a ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

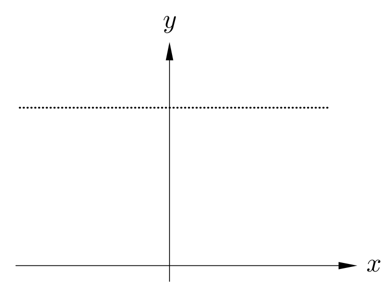


Abb. 6.19 c
$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

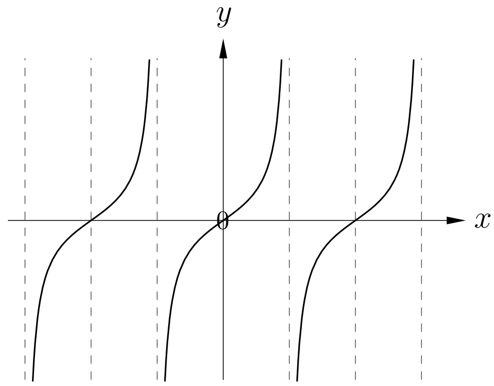


Abb. 6.19 d

Sei $f(x) = \tan x$.
An den Stellen $a = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, besitzt f Unstetigkeiten zweiter Art.

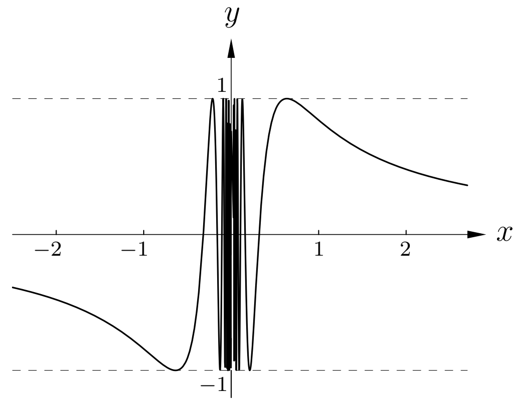


Abb. 6.19 e

Sei $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
An der Stelle $a = 0$ besitzt f eine Unstetigkeit zweiter Art.

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Bisher wurden vorwiegend Funktionen der Art **6/5/0**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

betrachtet, und gewisse Eigenschaften dieser Funktionen untersucht. Dabei traten immer wieder annähernd gleichlautende Definitionen und Sätze auf. Daher war es hilfreich, den Begriff des metrischen Raumes einzuführen, um grundlegende analytische Begriffe und Sätze nur einmal definieren bzw. beweisen zu müssen, um sie dann für die jeweils betrachteten konkreten metrischen Räume entsprechend interpretieren zu können.

Weiterhin haben wir beschränkte und abgeschlossene Teilmengen aus $\mathbb{R}^n$ kompakt genannt. Dieser Begriff soll jetzt für beliebige metrische Räume neu definiert werden. Anschließend wird gezeigt, daß nach dieser neuen Definition die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ genau die beschränkten und abgeschlossenen sind, so daß nachträglich die Bezeichnungsweise *kompakt* gerechtfertigt ist.

Definition. (*Überdeckung*) **6/5/1**
Es sei $(\mathbb{M}, \varrho)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.
Weiterhin sei $\mathcal{U}$ ein System von (offenen) Teilmengen von $\mathbb{M}$ (also $\mathcal{U} \subseteq Pot(\mathbb{M})$).

(1) $\mathcal{U}$ ist eine (*offene*) *Überdeckung* von M
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Zu jedem $a \in M$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so daß $a \in U$.
(Die Mengen aus $\mathcal{U}$ überdecken die Menge M).

(2) $\mathcal{U}$ ist eine *endliche Überdeckung* von M
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $\mathcal{U}$ ist eine Überdeckung von M, und $\mathcal{U}$ enthält nur endlich viele Mengen.

6/5/2

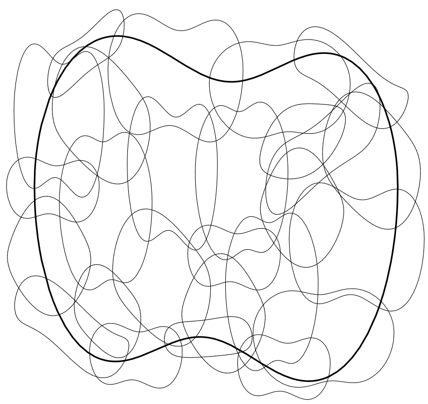


Abb. 6.20

Die durch die dickere Strichstärke symbolisierte Menge sei M, die durch die dünnere Strichstärke gekennzeichneten Mengen bilden dann eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M. In der Abbildung ist offensichtlich eine endliche Überdeckung dargestellt.

Definition. (*kompakt*) **6/5/3**

Es sei $(\mathbb{M}, \varrho)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

(1) M ist *kompakt*
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Teilüberdeckung von M (d.h., ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M, dann existiert ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \ldots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$, so daß schon $\mathcal{U}_0$ die Menge M überdeckt).

(2) $(\mathbb{M}, \varrho)$ ist *kompakt*
$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ $M = \mathbb{M}$ ist kompakt.

Satz 6.22 (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*) **6/5/4**

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist M beschränkt und abgeschlossen, und ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M, dann enthält $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von M
(d.h., M ist kompakt im Sinne der obigen Definition).

Beweis. (mit Würfelschachtelung) **6/5/5**

Nach Voraussetzung ist M beschränkt, folglich ist M in einem Würfel W_0 (mit endlicher Kantenlänge) enthalten, also $M \subseteq W_0$ und $M = M \cap W_0$. Weiterhin ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M.

Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung von $M \cap W_0$.

Völlig analog wie im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.4) wird W_0 in $k := 2^n$ Teilwürfel $W_0^1, \ldots, W_0^k$ durch Halbierung der Kantenlängen zerlegt. Folglich ist

$$W_0 = \bigcup_{i=1}^{k} W_0^i \quad \text{und} \quad M \cap W_0 = M \cap \bigcup_{i=1}^{k} W_0^i = \bigcup_{i=1}^{k} (M \cap W_0^i).$$

Dann gibt es wenigstens einen Teilwürfel $W_0^i := W_1$, so daß $M \cap W_0^i = M \cap W_1$ durch kein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ überdeckt wird. Induktiv schließt man weiter. (Da der Induktionsschritt völlig analog zum Anfangsschritt erfolgt, wird er hier weggelasen.)

Es entsteht eine Würfelschachtelung $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots$, so daß $M \cap W_i$ durch kein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ überdeckt wird und die Kantenlänge des i-ten Würfels, $l(W_i)$, durch $l(W_i) = \frac{1}{2^i} \cdot l(W_0)$ gegeben ist.

Analog wie im Beweis von Satz 6.4 schachtelt die konstruierte Würfelfolge einen Punkt $\bar{c} \in \mathbb{R}$ ein, d.h., $\bar{c} \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} W_i$.

Offenbar ist jede der Mengen $M \cap W_i$ unendlich, da sonst $M \cap W_i$ schon durch ein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ überdeckt wird.
Sei $\varepsilon' > 0$. Wir betrachten $U_{\varepsilon'}(\bar{c})$ und wählen i so groß, daß $W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$ und damit $M \cap W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$. Dann liegen in jeder ε'-Umgebung von $\bar{c}$ unendlich viele Elemente aus M. Folglich ist $\bar{c}$ ein Häufungspunkt von M. Da M abgeschlossen ist, gehört $\bar{c}$ zu M. Folglich gibt es eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$, so daß $\bar{c} \in U$. Mit $\bar{c}$ gehört noch eine ganze ε-Umgebung zu U. Es existiert also ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(\bar{c}) \subseteq U$. Wir wählen i jetzt so groß, daß $W_i \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$. Dann ist $M \cap W_i \subseteq U$, folglich wird $M \cap W_i$ schon durch **eine** Menge $U \in \mathcal{U}$ überdeckt. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß $M \cap W_i$ durch kein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ überdeckt wird. Damit ist die obige Annahme falsch und der Satz bewiesen. ❑

Es gilt auch die Umkehrung des letzten Satzes. **6/5/6**

Satz 6.23 *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. **6/5/7**
Ist M *kompakt* (im Sinne der Definition in metrischen Räumen)*, dann ist* M *beschränkt und abgeschlossen* (in $\mathbb{R}$).

Beweis. Annahme: Es gilt nicht: M ist beschränkt und abgeschlossen. **6/5/8**
Dann ist M nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen.

Fall 1. M ist nicht beschränkt.

Dann gibt es eine unbeschränkte Folge $(\bar{x}_i)$ in M, so daß $|\bar{x}_{i+1}| \geq |\bar{x}_i| + 1$ für jedes i.

Sei $\mathcal{U} := \{U_{\frac{1}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$.

Offenbar ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Es gibt aber kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, durch das M überdeckt wird, denn jedes solche $\mathcal{U}_0$ könnte z.B. höchstens endlich viele der Folgeglieder überdecken, da diese zueinander einen Abstand der Größe wenigstens 1 haben. ↯!

Fall 2. M ist nicht abgeschlossen.

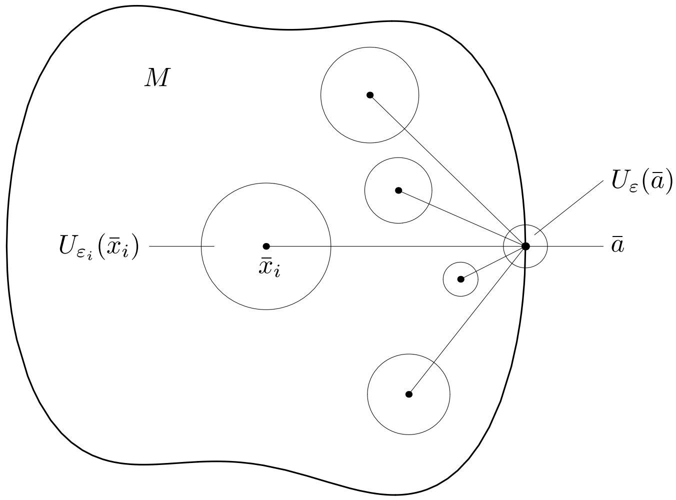
Dann gibt es einen Häufungspunkt $\bar{a}$ von M mit $\bar{a} \notin M$.

Für jedes $\bar{x} \in M$ ist somit $\bar{x} \neq \bar{a}$, also $|\bar{x} - \bar{a}| := \varepsilon_{\bar{x}} > 0$.
Folglich ist $\mathcal{U} := \{U_{\frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$ eine offene Überdeckung von M.

Behauptung: Kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ überdeckt M.

Ist $\mathcal{U}_0 = \{U_{\varepsilon_1}(\bar{x}_1), \ldots, U_{\varepsilon_m}(\bar{x}_m)\}$ ein beliebiges endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$ und $\varepsilon_i := \varepsilon_{\frac{\bar{x}_i}{4}}$, dann sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\} = \min\{\frac{|\bar{x}-\bar{a}|}{4} : i = 1, \ldots, m\}$.
Folglich ist $U\varepsilon(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$ (vgl. Abb. 6.21).

Da $\bar{a}$ ein Häufungspunkt von M ist, existiert ein $\bar{y} \in M$, so daß $\bar{y} \in U_\varepsilon(\bar{a})$ und $\bar{y} \notin U_{\varepsilon_i}(\bar{x})$ für $i = 1, \ldots, m$, daher wird $\bar{y}$ durch $\mathcal{U}_0$ nicht überdeckt. Folglich gibt es kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, welches M überdeckt. ↯! ❑



6/5/9

Abb. 6.21 Offensichtlich ist $U_\varepsilon(\bar a) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar x_i) = \emptyset$ für alle $\bar x_i \in M$. Die ε_i-Umgebungen von $\bar x_i$ haben einen Radius von $\frac{|\bar x_i - \bar a|}{4}$.

Aus den letzen beiden Sätzen ergibt sich trivialerweise das folgende Korollar, das häufig ebenfalls als Überdeckungssatz von Heine-Borel bezeichnet wird.

Korollar. (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*) **6/5/10**
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
M *ist beschränkt und abgeschlossen* $\iff$ M *ist kompakt.*

Aus dem Korollar zu Satz 3.9 folgt, daß jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert, d.h., sie besitzt dort einen Grenzwert. Das analoge Resultat gilt für Cauchyfolgen in $\mathbb{R}^n$. In $\mathbb{Q}$ konvergieren Cauchyfolgen i.a. nicht, z.B. ist $(1+\frac{1}{n})^n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ aber keinen Grenzwert besitzt. **6/5/11**

Es gibt also metrische Räume, in denen Cauchyfolgen immer konvergieren und solche, in denen das nicht der Fall ist. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition.

Definition. (*Vollständigkeit*) **6/5/12**
Ein metrischer Raum $(\mathbb{M}, \varrho)$ ist *vollständig*
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Jede Cauchyfolge aus $(\mathbb{M}, \varrho)$ konvergiert in $(\mathbb{M}, \varrho)$.

Hieraus ergibt sich sofort, daß $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ vollständige metrische Räume sind und $\mathbb{Q}$ unvollständig ist. **6/5/13**

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 6

- Definiton: euklidischer Raum; **6/6/1**
- Eigenschaften des Abstandes (Satz 6.2); **6/6/2**
- Definitionen: metrischer Raum, ε-Umgebung, Umgebung; **6/6/3**
- Definitionen: Beschränktheit, Häufungspunkt, innerer Punkt, Randpunkt, isolierter Punkt; **6/6/4**
- Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.4); **6/6/5**
- Definitionen: offene und abgeschlossene Menge; **6/6/6**
- Eigenschaften solcher Mengen (Sätze 6.5 und 6.6); **6/6/7**
- Definition: Konvergenz in metrischen Räumen, insbesondere in $\mathbb{R}^n$; **6/6/8**
- „Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise Konvergenz“ (Satz 6.7); **6/6/9**
- Definition: Vektorfunktion; **6/6/10**
- Operationen für Funktionen; **6/6/11**
- „Stetigkeit von Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit“; **6/6/12**
- Definition: Grenzwerte; Beziehungen zwischen Grenzwert und Stetigkeit; **6/6/13**
- Definitionen: Kurve, bogenzusammenhängend, kompakte Menge, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit; **6/6/14**
- Eigenschaften stetiger Funktionen (Überblick); **6/6/15**
- Beziehungen zwischen: Stetigkeit, gleichmäßiger Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit; **6/6/16**
- Definitionen: rechtsseitige und linksseitige Stetigkeit, rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert; Beziehungen zwischen diesen Begriffen; **6/6/17**
- Klassifikation von Unstetigkeitsstellen (Überblick). **6/6/18**