Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

3. $f(x) = x^2$. **7/1/8/3**

Behauptung: $f'(x) = 2x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a.$$

Folglich ist

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a.$$

Die Gleichung der Tangente berechnet sich wie folgt:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2.$$

Speziell für $a = 1$ ergibt sich dann

$$y = t(x) = 2x - 1 \qquad \text{(vgl. Abb. 7.3)}$$

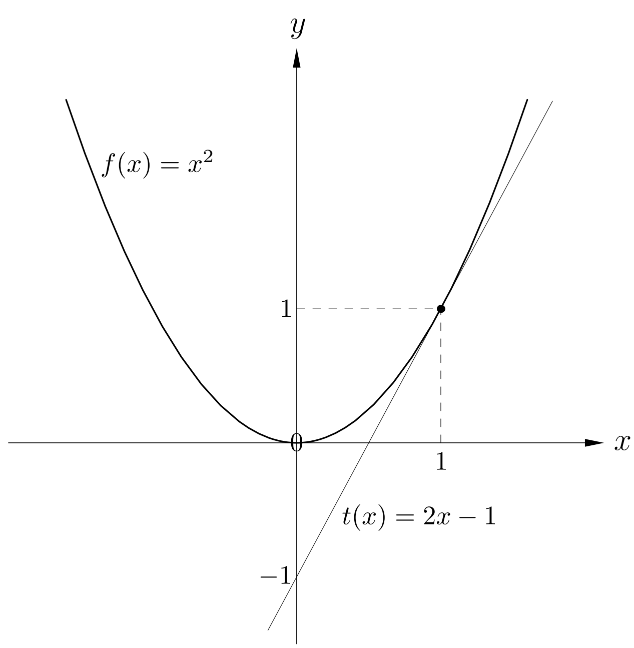

Abb. 7.3 Die Tangente an der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $(1, 1)$ hat den Anstieg 2; sie schneidet die y-Achse im Punkt $(0, -1)$.