Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

5. Es sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. **7/1/8/5**

Behauptung: $f'(x) = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x-a} = \mathrm{e}^a \cdot \frac{\mathrm{e}^{x-a}-1}{x-a} = \mathrm{e}^a \cdot \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}, \quad \text{für} \quad h := x-a.$$

g.z.z.: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle $h \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig. Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge $h_\nu \to 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1,$$

Also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1.$$