Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

6. Es sei $f(x) = \sin x$. **7/1/8/6**

Behauptung: $f'(x) = \cos x$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \text{für} \quad h := \frac{x-a}{2}.$$

Für $x \to a$ gilt $h \to 0$ und umgekehrt.

cos ist stetig, folglich ist $\lim\limits_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$.

g.z.z.: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Es ist

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Analog wie im 5. Beispiel ist diese Potenzreihe ebenfalls in ihrem Mittelpunkt 0 stetig. Folglich ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a = \sin' a.$$