Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Satz 7.5 (*Kettenregel*) **7/1/23**
Ist g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung").

Beweis. Es sei $b = g(a)$, dann ist f nach Voraussetzung in b differenzierbar. Folglich existiert $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)$, und für $y - b := k$ ist $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(b+k) - f(b)}{k} = f'(b)$. **7/1/24**
Wir definieren jetzt eine für den Beweis nützliche Hilfsfunktion:

$$\psi(k) = \begin{cases} \frac{f(b+k)-f(b)}{k} - f'(b), & \text{für } k \neq 0, \\ 0, & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Dann ist ψ in $k = 0$ stetig, denn $\lim\limits_{k \to 0} \psi(k) = 0 = \psi(0)$.
Damit gilt für alle k in einer Umgebung $U(0)$:

$$f(b+k) - f(b) = k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k). \qquad (\star)$$

Weiterhin sei $x := a + h$ und $\varphi(h) := g(a+h) - g(a)$. Dann ist $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0 = \varphi(0)$, und damit ist φ in 0 stetig. Folglich gilt

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} =$$

$$\frac{f(\varphi(h) + g(a)) - f(g(a))}{h} := (\star\star)$$

Ersetzt man in $(\star)$ k durch $\varphi(h)$, dann erhält man

$$(\star\star) = \frac{f(b+k) - f(b)}{h} = \frac{k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k)}{h} =$$

$$\frac{\varphi(h)}{h} \cdot f'(b) + \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \psi(\varphi(h)).$$

Es ist

$$\frac{\varphi(h)}{h} = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} g'(a),$$

denn g ist in a differenzierbar. Weiterhin sind ψ und φ in 0 stetig, folglich gilt

$$\lim_{h \to 0} \psi(\varphi(h)) = \psi(\lim_{h \to 0} \varphi(h)) = \psi(\underbrace{\varphi(0)}_{=0}) = \psi(0) = 0.$$

Insgesamt erhält man

$$\lim_{x\to a}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a}=$$

$$\lim_{h\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\longrightarrow g'(a)}\cdot f'(b)+\frac{\varphi(h)}{h}\cdot\underbrace{\psi(\varphi(h))}_{\longrightarrow 0}\Big)=$$

$$f'(b)\cdot g'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a). \qquad ❏$$