Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Satz 7.6 (*Ableitung der Umkehrfunktion*) **7/1/25**
Ist f *in einer Umgebung* $U(a)$ *von* a *stetig und streng monoton, und ist* f *in* a *differenzierbar und* $f'(a) \neq 0$, *dann ist* f^{-1} *in* $b := f(a)$ *differenzierbar, und es ist* $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Beweis. Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in einer Umgebung von $b = f(a)$ stetig. Für $x \in U(a)$ **7/1/26**
ist $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; insbesondere ist $a = f^{-1}(b)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}.$$

Wenn $y \to b$, also $f(x) \to f(a)$, so gilt wegen der Stetigkeit von f^{-1} in $b = f(a)$

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=x} \longrightarrow \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{=a}, \quad \text{also} \quad x \to a.$$

Es gilt auch umgekehrt: Wenn $x \to a$, so $y = f(x) \to f(a) = b$.
Also $y \to b \iff x \to a$. Folglich existiert

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = (f^{-1})'(b),$$

und es ist

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}. \qquad \square$$