Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.8 (*Satz von Rolle*) **7/2/0**
Ist $a < b$ *und* f *in* $[a, b]$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar und ist* $f(a) = f(b)$, *dann existiert ein* $c \in (a, b)$, *so daß* $f'(c) = 0$.

Beweis. **7/2/1**

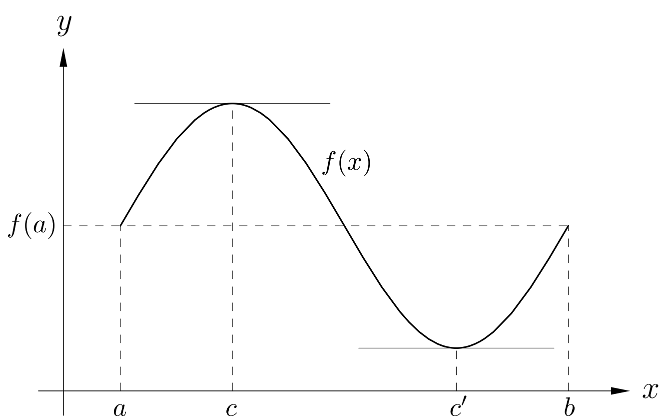

Abb. 7.6 An den Stellen c und c' besitzt die Funktion jeweils eine waagerechte Tangente.

Fall 1. f ist konstant. Dann ist $f'(c) = 0$ sogar für jedes $c \in (a, b)$.

Fall 2. f ist nicht konstant.

Da f in $[a, b]$ stetig ist, besitzt f dort ein Maximum und ein Minimum. Wenigstens eins von beiden wird im Inneren des Intervalls angenommen, da sonst f konstant ist. Es werde o.B.d.A. das Minimum an einer Stelle $c \in (a, b)$ angenommen, d.h., $f(x) \geq f(c)$ für jedes $x \in [a, b]$.

Behauptung: $f'(c) = 0$.

Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

folglich existieren auch rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten und beide sind gleich $f'(c)$.

Für $x > c$, also $x - c > 0$, ist $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ und somit

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Es sei nun $x < c$. Folglich ist $x - c < 0$, also $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ und damit

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leq 0.$$

Insgesamt erhält man

$$0 \leq f'(c) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0. \qquad ❏$$