

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Rolle.)

7/2/3

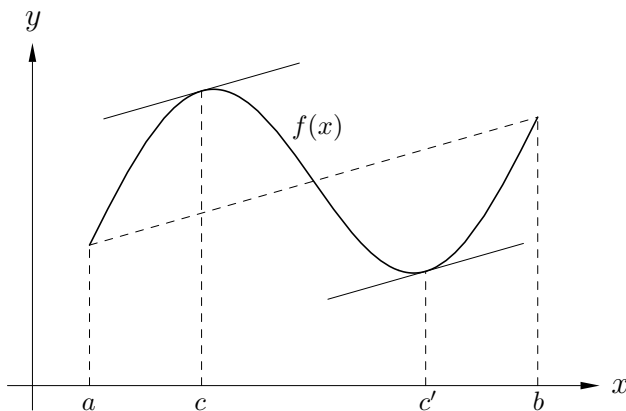


Abb. 7.7 An den Stellen c und c' besitzt die Funktion Tangenten, die parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verlaufen.

Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion, auf die wir den Satz von Rolle anwenden werden:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

(Von f wird eine lineare Funktion subtrahiert, die den gleichen Anstieg besitzt, wie die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.)

Offenbar ist g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, und es gilt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Für die Funktion g existiert dann nach dem Satz von Rolle ein Element $c \in (a, b)$, so daß

$$g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$