

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n + 1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Beweis. Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion

7/2/10

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

Offenbar ist φ in I $(n + 1)$ -mal differenzierbar, denn f hat diese Eigenschaft, und $p(x)$ ist ein Polynom.

Induktiv zeigt man leicht

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Der Anfangsschritt $\varphi(a) = 0$ ist trivial.

$$\varphi'(x) = f'(x) - 0 - f'(a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2(x - a)^1 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n(x - a)^{n-1} \implies$$

$$\varphi'(a) = 0 \quad \text{usw.}$$

Da Polynome n -ten Grades bei $(n + 1)$ -maliger Differentiation zu null werden, erhält man

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$\psi(x)$ sei eine weitere Hilfsfunktion mit

$$\psi(x) := (x - a)^{n+1} \implies$$

$$\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$$

für jedes x und

$$\psi^{(i)}(x) = (n + 1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n - i + 1) \cdot (x - a)^{n-i} \neq 0$$

falls $x \neq a$ und $i = 0, \dots, n$.

Wir wenden den 2. Mittelwertsatz mehrmals an.

Für $x \in I$, $x \neq a$, und o.B.d.A. $a < x$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} && \text{(denn } \varphi(a) = \psi(a) = 0) \\
&= \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} && \text{für ein } x_1 \in (a, x) \\
&= \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}{\psi'(x_1) - \psi'(a)} && \text{(denn } \varphi'(a) = \psi'(a) = 0) \\
&= \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} && \text{für ein } x_2 \in (a, x_1) \\
&\vdots \\
&= \frac{\varphi^{(n)}(x_n)}{\psi^{(n)}(x_n)} && \text{für ein } x_n \in (a, x_{n-1}) \\
&= \frac{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(x_n) - \psi^{(n)}(a)} && \text{(denn } \varphi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(a) = 0) \\
&= \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} && \text{für ein } x_{n+1} \in (a, x_n).
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man insgesamt

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \quad \text{und } a < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x \quad \implies$$

es gibt ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß $x_{n+1} = a + \vartheta(x - a)$.

Folglich ist

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \cdot \psi(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{n+1} := R_n(x),$$

und nach Definition gilt

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

Hieraus erhält man sofort die Behauptung. \square