# Kapitel 7
# Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

## 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Korollar.** *Es sei* $I$ *ein Intervall mit* $a \in I$, $f$ *sei in* $I$ *beliebig oft differenzierbar, und für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, *wobei* $p_n(x)$ *das Taylorpolynom und* $R_n(x)$ *das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist* (siehe Satz 7.11). **7/2/12**
*Wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *für jedes* $x \in I$, *dann konvergiert die Folge* $\big(p_n(x)\big)$ *der Partialsummen der Reihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ *gegen* $f(x)$.
(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich $f$ in eine sog. *Taylorreihe* entwickeln, d.h., $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$.)

**Beweis.** Nach der Taylorschen Formel gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in I$: **7/2/13**

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Folglich gilt

$$p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x),$$

und da $\big(p_n(x)\big)$ die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ ist, erhält man

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i. \qquad \square$$