Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$ **7/2/15/1**

Man kann leicht zeigen, daß f in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar ist. (Induktiv beweist man, daß die n-te Ableitung für $x \neq 0$ immer die Gestalt $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot r(x)$ hat, wobei $r(x)$ eine rationale Funktion ist, und die $(n+1)$-te Ableitung für $x = 0$ existiert und 0 ist.) Folglich gilt stets $f^{(n)}(0) = 0$, und damit

$$\underbrace{f(x)}_{\neq 0} \neq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{=0} \cdot (x-0)^i = 0.$$

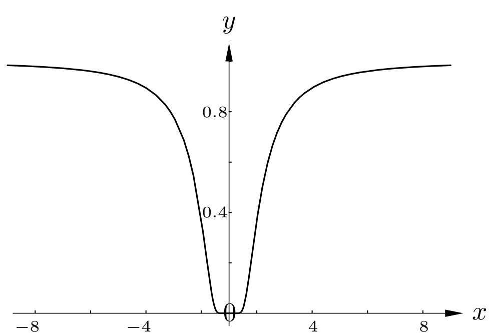

Abb. 7.9 a

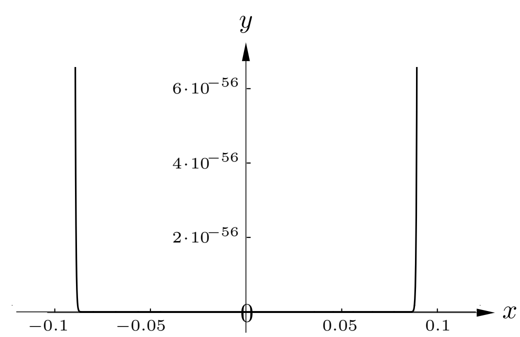

Abb. 7.9 b

Die Abbildung 7.9 a zeigt die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, für $x \neq 0$, und $f(0) = 0$. In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 schmiegt sich diese Funktion der x-Achse so gut an, daß alle Ableitungen von $f(x)$ in 0 stets null werden. Abb. 7.9 b zeigt die gleiche Funktion in einer solchen Umgebung.