

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$

7/2/15/1

Man kann leicht zeigen, daß f in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar ist. (Induktiv beweist man, daß die n -te Ableitung für $x \neq 0$ immer die Gestalt $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot r(x)$ hat, wobei $r(x)$ eine rationale Funktion ist, und die $(n + 1)$ -te Ableitung für $x = 0$ existiert und 0 ist.)

Folglich gilt stets $f^{(n)}(0) = 0$, und damit

$$\underbrace{f(x)}_{\neq 0} \neq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{=0} \cdot (x - 0)^i = 0.$$

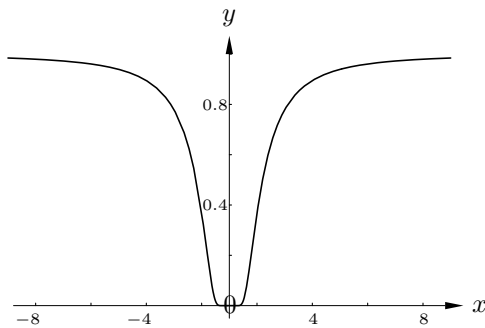


Abb. 7.9 a

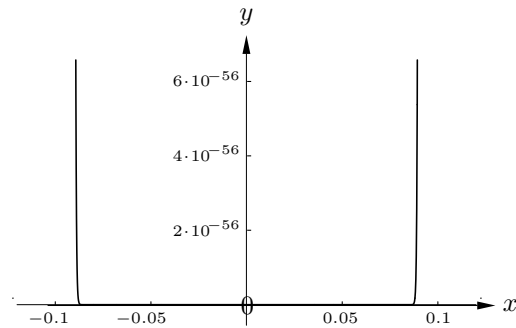


Abb. 7.9 b

Die Abbildung 7.9 a zeigt die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, für $x \neq 0$, und $f(0) = 0$. In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 schmiegt sich diese Funktion der x -Achse so gut an, daß alle Ableitungen von $f(x)$ in 0 stets null werden. Abb. 7.9 b zeigt die gleiche Funktion in einer solchen Umgebung.

2. Es sei $f(x) = e^x$, $a = 0$, $\varrho > 0$ und $I = (-\varrho, \varrho)$.

7/2/15/2

Dann ist offenbar f in I für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor erhält man für $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot (x - 0)^i + \frac{f^{(n+1)}(0 + \vartheta(x - 0))}{(n + 1)!} \cdot (x - 0)^{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^{\vartheta x}}{(n + 1)!} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$.

Folglich ist

$$R_n(x) = e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$e^{\vartheta x}$ ist in I beschränkt, denn $|e^{\vartheta x}| \leq e^{\vartheta|x|} \leq e^{\vartheta \varrho} := c$.

Weiterhin ist $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \leq \varrho^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Folglich gilt

$$|R_n(x)| = \underbrace{|e^{\vartheta x}|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}_{\leq \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}} \leq c \cdot \underbrace{\frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Damit läßt sich die Exponentialfunktion e^x in einem gegebenen Intervall $(-\varrho, \varrho)$ (und somit auch in jedem Intervall $[a, b] \subseteq (-\varrho, \varrho)$) durch ein Polynom $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ mit vorgegebener Genauigkeit ε approximieren. (Die komplizierteste Aufgabe bei derartigen Approximationen besteht meistens in der Abschätzung des Restgliedes.)

Insbesondere erhält man für $x = 1$

$$e = e^1 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} + R_n(1) \quad \text{und} \quad |R_n(1)| < \varepsilon,$$

d.h., e kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.

Nach dem Korollar gilt für die Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot x^i,$$

wodurch die Definition dieser Funktion als Reihe nachträglich gerechtfertigt ist.