Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.12 (*Regel von de l'Hospital für* „$\frac{0}{0}$“) **7/3/0**

Voraussetzung:

(1) *Sei* $a < b$ *und seien* f, g *in* (a, b) *differenzierbar und in* a (*rechtsseitig*) *stetig.*

(2) *Sei* $f(a) = g(a) = 0$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für jedes* $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *dann existiert* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *und es ist* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des 2. Mittelwertsatzes.) **7/3/1**

Es sei $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes x mit $a < x < a + \delta$ gilt: $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - a^* \right| < \varepsilon$.

z.z.: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes x mit $a < x < a + \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| < \varepsilon.$$

Zunächst gilt: $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Angenommen, es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$.

Dann gibt es nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, x)$, so daß $g'(c) = 0$. ↯!

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ und δ entsprechend der Existenz von $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$ gewählt.

Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann für $a < x < a + \delta$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - a^* \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - a^* \right| < \varepsilon,$$

für ein c_x mit $a < c_x < x < a + \delta$. ❑