Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Korollar 2. (*Regel von de l'Hospital für* „ $\frac{\infty}{\infty}$ “) **7/3/4**

Voraussetzung:

(1) *Sei* $a < b$ *und seien* f, g *in* (a, b) *differenzierbar.*

(2) Sei $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = \infty$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für jedes* $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *dann existiert* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *und es ist* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß g' in (a, b) stets positiv oder stets negativ ist. **7/3/5**
Angenommen, es gibt Elemente $a' < b'$ in (a, b), so daß $g'(a') < 0 < g'(b')$ (den Fall $g'(a') > 0 > g'(b')$ beweist man analog). Da g in (a, b) differenzierbar ist, ist g in $[a', b']$ stetig und besitzt dort ein Minimum und ein Maximum. Wenigstens eins von beiden liegt im Inneren der Intervalls. Sei c eine Extremstelle von g in (a', b'). Dann ist $g'(c) = 0$ (siehe Beweis des Satzes von Rolle). N!
Da g' in (a, b) das Vorzeichen nicht wechselt, ist g dort streng monoton (dies folgt sofort aus Satz 7.9). Wegen $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = \infty$ ist g in (a, b) streng monoton fallend und in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von a positiv.

Mit diesen Informationen beweisen wir nun die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} := c \ (c \in \mathbb{R})$. Folglich gibt es nach Definition des Limes ein $u \in (a, b)$, so daß

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in (a, u).$$

Wir wählen jetzt u so nahe bei a, daß g in $(a, u]$ positiv ist. Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes x mit $a < x < u$ ein $\xi \in (x, u)$, so daß

$$\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Dann gilt für jedes feste $u \in (a, b)$ und jedes $x \in (a, u)$:

$$\left|\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} - c = \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} + \Big(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\Big) \cdot \Big(\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\Big). \qquad (\star)$$

$\big((\star)$ kann durch ausrechnen bewiesen werden.$\big)$

Wegen $a < x < u$ ist $0 < g(x) < g(u)$ und somit $0 < \dfrac{g(u)}{g(x)} < 1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - c\Big| &\leq \Big|\frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)}\Big| + \underbrace{\Big|1 - \frac{g(u)}{g(x)}\Big|}_{<1} \cdot \underbrace{\Big|\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\
&< \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{|f(u) - c \cdot g(u)|}_{:=d} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (u \text{ fest} \Longrightarrow d \text{ konstant}) \\
&= \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. Folglich existiert ein δ mit $0 < \delta < u - a$, so daß für jedes $x \in (a, a + \delta)$ gilt: $\dfrac{d}{g(x)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Hieraus folgt schließlich für alle $x \in (a, a + \delta)$:

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - c\Big| < \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \qquad ❏$$