

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.14** Sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  differenzierbar. Dann gilt: 7/3/14  
 $f$  ist in  $I$  konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw  $f'$  in  $I$  monoton (bzw. streng monoton) wächst.

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Sei  $f$  in  $I$  konvex von unten und seien  $c_1, c_2 \in I$  mit  $c_1 < c_2$ . 7/3/15  
 z.z.:  $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ .

Nach Definition der Konvexität gilt:

$$\begin{aligned} f(c_2) &\geq f(c_1) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) \quad \text{und} \\ f(c_1) &\geq f(c_2) + f'(c_2) \cdot (c_1 - c_2) \quad \implies \\ f(c_2) + f(c_1) &\geq f(c_1) + f(c_2) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) + f'(c_2) \cdot \underbrace{(c_1 - c_2)}_{-(c_2 - c_1)} \quad \implies \\ 0 &\geq \underbrace{(c_2 - c_1)}_{>0} \cdot (f'(c_1) - f'(c_2)) \quad \implies \\ f'(c_1) - f'(c_2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

( $\longleftarrow$ ) Sei  $f'$  in  $I$  monoton wachsend und  $c, x \in I$ ,  $x \neq c$ , und o.B.d.A. sei  $c < x$  (den Fall  $x < c$  beweist man analog).

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein  $c_1$  mit  $c < c_1 < x$ , so daß

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_1).$$

Da  $f'$  in  $I$  monoton wächst, gilt

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c_1)}_{\geq f'(c)} \cdot \underbrace{(x - c)}_{>0},$$

und damit ist  $f(x) \geq f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$ .

Den verbleibenden Teil der Behauptung: „streng konvex“ und „streng monoton“ zeigt man sehr leicht durch ähnliche Überlegungen wie im Beweis von Satz 7.13.  $\square$