Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.15 (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*) **7/3/21**

Sei $a < b$, f *in* $I = (a, b)$ *differenzierbar und* $c \in I$.
Besitzt f *in* c *ein lokales Extremum, dann ist* $f'(c) = 0$.

Beweis. Sei $f(c)$ ein lokales Minimum von f in I (für ein lokales Maximum verläuft der Beweis analog). **7/3/22**

Dann existiert eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für } x > c$$

und

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{für } x < c.$$

Da f in c differenzierbar ist, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle c, und er ist $f'(c)$. Folglich existieren auch rechts- und linksseitiger Grenzwert dieses Differenzenquotienten und beide Grenzwerte sind gleich $f'(c)$. Also

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{>0} = f'(c) \geq 0$$

und

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{<0} = f'(c) \leq 0.$$

Damit gilt insgesamt $f'(c) = 0$. ❏