Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.16 (*Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*) **7/3/24**
Sei $a < b$, f *in* $I = (a, b)$ *zweimal differenzierbar und* $c \in I$.
Ist $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) > 0$ (*bzw.* $f''(c) < 0$), *dann besitzt* f *in* c *ein lokales Minimum* (*bzw. ein lokales Maximum*).

Beweis. Sei $f''(c) > 0$ (den Fall $f''(c) < 0$ beweist man analog). **7/3/25**
Dann gilt nach der Definition der Differenzierbarkeit von f' in c

$$0 < f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Nach den Eigenschaften des Grenzwertes gibt es eine Umgebung $U(c)$, so daß

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für alle } x \in U(c).$$

Wegen $f'(c) = 0$ gilt also für alle $x \in U(c)$

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0.$$

Folglich haben $f'(x)$ und $x - c$ in $U(c)$ stets das gleiche Vorzeichen.
Wenn also $x > c$, so $f'(x) > 0$,
und wenn $x < c$, so $f'(x) < 0$.
Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_x),$$

wobei c_x zwischen x und c liegt, also $c < c_x < x$ bzw. $x < c_x < c$.
Da die Funktionen $f'(x)$ und $x - c$ links und rechts von c jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt aus der letzten Gleichheit

$$f(x) - f(c) = f'(c_x) \cdot (x - c) > 0 \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\} \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) > f(c) \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\}.$$

Folglich besitzt f in c ein lokales Minimum. ❏