

## Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.17** Sei  $a < b$ ,  $f$  in  $I = (a, b)$   $2n$ -mal differenzierbar und  $c \in I$ . 7/3/26  
Ist  $f'(c) = \dots = f^{(2n-1)}(c) = 0$  und  $f^{(2n)}(c) > 0$  (bzw.  $f^{(2n)}(c) < 0$ ),  
dann besitzt  $f$  in  $c$  ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

**Beweis.** (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Taylor.) 7/3/27

Sei  $f^{(2n)}(c) > 0$  (für  $f^{(2n)}(c) < 0$  verläuft der Beweis analog).

Dann gilt

$$0 < f^{(2n)}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} \implies$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} > 0$$

für alle  $x \in U(c) \setminus \{c\}$ , wobei  $U(c)$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $c$  ist.  
Wegen  $f^{(2n-1)}(c) = 0$  gilt analog wie im Beweis von Satz 7.16, daß  $f^{(2n-1)}$  und  $x - c$   
links und rechts von  $c$  jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen.

Aus dem Satz von Taylor für  $2n - 2$  erhält man

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + \dots + \frac{f^{(2n-2)}(c)}{(2n - 2)!} \cdot (x - c)^{2n-2} +$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n - 1)!} \cdot (x - c)^{2n-1}.$$

Wegen  $f'(c) = \dots = f^{(2n-2)}(c) = 0$  gilt

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n - 1)!} \cdot (x - c)^{2n-1} > 0,$$

denn  $2n - 1$  ist ungerade, folglich haben  $x - c$  und  $(x - c)^{2n-1}$  links und rechts von  $c$  gleiches Vorzeichen, und damit haben auch  $f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))$  und  $(x - c)^{2n-1}$  gleiches Vorzeichen.

Es ist also  $f(x) > f(c)$  für alle  $x \in U(c) \setminus \{c\}$  und somit  $f(c)$  ein lokales Minimum von  $f$ .  $\square$