Kapitel 7
Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Beispiel einer Kurvendiskussion. **7/3/43**

Sei $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; Nullstellen sind nicht vorhanden.

(a). Monotonie

Wir bilden zunächst

$$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Für $x = \pm 1$ sind die Ableitungen nicht definiert.
Ist $x \neq \pm 1$, dann ist der Nenner von f' positiv, und damit gilt:
Wenn $x < -1$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng monoton fallend;
wenn $-1 < x < 0$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-1, 0)$ streng monoton fallend;
wenn $0 < x < 1$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(0, 1)$ streng monoton wachsend;
wenn $1 < x$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng monoton wachsend.

(b). Konvexität

Wir bilden $f''(x)$ und benutzen Satz 7.14 und das Korollar zu diesem Satz. Es ist

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Der Zähler von f'' ist stets positiv; der Nenner ist in $(-1, 1)$ negativ, sonst (außer in ± 1) positiv. Folglich gilt:

Wenn $x < -1$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng konvex von oben;
wenn $-1 < x < 1$, so $f''(x) > 0 \implies f$ ist in $(-1, 1)$ streng konvex von unten;
wenn $1 < x$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng konvex von oben.

(c). Lokale Extrema

Um die kritischen Stellen zu ermitteln, setzen wir zunächst

$$f'(x) = 0 = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \implies x = 0.$$

Also höchstens an der Stelle $x = 0$ besitzt f ein lokales Extremum.
Wir überprüfen jetzt die hinreichende Bedingung.
Es ist $f''(0) = 2 > 0$, folglich besitzt f in $x = 0$ ein lokales Minimum.
Der Extremwert selbst (also das lokale Minimum) ist $f(0) = 1$.

(d). Wendepunkte

Die Gleichung $f''(x) = 0$ besitzt keine Lösung, folglich hat f keinen Wendepunkt.

(e). Unendlichkeitsstellen

Hier kommen höchstens die Stellen ± 1 in Frage, da der Nenner von f an diesen Stellen null wird. Es ist

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty.$$

(f). Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{1 - x^2}_{< 0}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{1 - x^2}_{< 0}} = 0.$$

Insgesamt haben wir über f folgende Informationen:

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
- Nullstellen von f: keine,
- Monotoniebereiche:
  In $(-\infty, -1)$ und in $(-1, 0)$ ist f streng monoton fallend,
  in $(0, 1)$ und in $(1, -\infty)$ ist f streng monoton wachsend.
- Konvexitätsbereiche:
  In $(-\infty, -1)$ und in $(1, \infty)$ ist f streng konvex von oben,
  in $(-1, 1)$ ist f streng konvex von unten.
- lokale Extrema:
  In $x = 0$ besitzt f ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 1$.
- Wendepunkte: f besitzt keine Wendepunkte.
- Unendlichkeitsstellen:
  In -1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $-\infty$ bzw. ∞,
  in 1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.
- Verhalten im Unendlichen:
  Für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x)$ von unten gegen null.

Aus diesen Informationen kann man den groben Verlauf der Funktion skizzieren.
(vgl. hierzu Abb. 7.14)

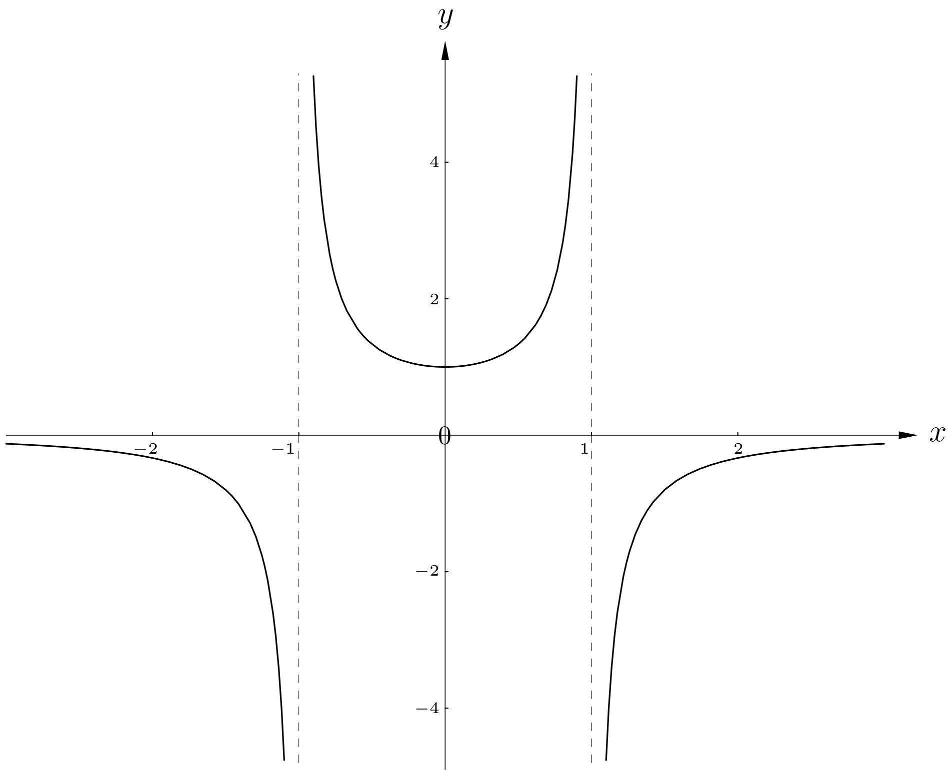

Abb. 7.14 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.