

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 7.22** (*Differenzierbarkeit der Grenzfunktion*)

7/4/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n(c))$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und ist  $(f'_n)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und

ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt

es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen

$f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ .

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)