

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 7.22** (Differenzierbarkeit der Grenzfunktion)

7/4/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n(c))$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und ist  $(f'_n)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und

ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt

es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen

$f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ .

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)

**Beweis.** (1). Wir zeigen zunächst, daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. 7/4/2

Dazu sei  $\varepsilon > 0$  und  $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Dann erhält man (unter Ausnutzung des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung) für alle  $x \in I$  und für hinreichend große  $m, n$ :

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_m(c) + f_m(c) - f_n(c) + f_n(c) - f_n(x)| \\ &\leq \underbrace{|f_m(c) - f_n(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\text{wegen der Konvergenz von } (f_n) \text{ in } c) \\ &\quad + \underbrace{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)|}_{= |(x-c)(f_m - f_n)'(\xi)|} \quad (\text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|x-c|}_{\leq |b-a|} \cdot \underbrace{|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|}_{< \varepsilon'} \quad (\text{für alle } x \in I) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |b-a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert eine Funktion  $f$ , so daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $f$  in  $I$  differenzierbar und  $f' = g$  ist.

Sei  $c \in I$  und  $g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & \text{für } x \neq c, \\ f'_n(c) & \text{für } x = c. \end{cases}$

Da  $f$  in  $c$  differenzierbar ist, existiert der Limes des Differenzenquotienten, folglich ist  $g_n$  in  $c$  stetig. Wir zeigen zunächst, daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig konvergiert.

Dazu sei  $\varepsilon > 0$  und  $m, n$  seien hinreichend groß. Für  $x = c$  gilt dann

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon.$$

Für  $x \neq c$  erhält man

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \\ &= \left| \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} \right| \\ &= |(f_m - f_n)'(\xi)| \quad (1. \text{ Mittelwertsatz der Differentialrechnung}) \\ &= |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \\ &< \varepsilon. \quad ((f'_n) \text{ ist in } I \text{ gleichmäßig konvergent}) \end{aligned}$$

Folglich ist  $(g_n)$  nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen (Satz 5.18) gleichmäßig konvergent in  $I$ . Also gilt für  $x \neq c$

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \right) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen  $g_n$  in  $c$  und der gleichmäßigen Konvergenz von  $(g_n)$  folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion  $g$  in  $c$ . Hieraus erhält man für  $x \neq c$

$$g(c) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Damit existiert die 1. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $c$ , und es gilt  $f'(c) = g(c)$ .

(2). Setzt man  $F_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i(x)$ , dann ist nach Voraussetzung die Folge  $(F_n(c))$  konvergent, alle  $F_n$  sind in  $I$  differenzierbar,  $F'_n(x) = \sum_{i=0}^n f'_i(x)$ , und  $(F'_n)$  konvergiert in  $I$  gleichmäßig gegen  $g$ .

Nach (1) existiert dann eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $(F_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, und es ist

$$f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(x).$$

Daraus erhält man sofort

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x). \quad \square$$