

Kapitel 8 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

In Kapitel 7 wurden zwei äquivalente Definitionen für die Differenzierbarkeit von Funktionen mit einer Veränderlichen angegeben. Wir werden jetzt die zweite der Definitionen, die die lineare Approximation benutzt, für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit mehreren Veränderlichen verallgemeinern. Hierzu machen wir zunächst einen kleinen Exkurs in die lineare Algebra. 8/1/0

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ Vektorräume mit kanonischer Basis) kann als Matrix aufgefaßt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sind dann sog. Spaltenvektoren:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

und es ist

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Ist $m = 1$, dann besteht die Matrix A nur aus einer Zeile, die dann als Vektor in \mathbb{R}^n aufgefaßt werden kann. Hierfür wählen wir die Bezeichnung $A := (a_1, \dots, a_n)$.

In diesem Fall schreibt man (der Einfachheit wegen aus drucktechnischen Gründen) die Vektoren $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ als Zeilen: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist

$$A\bar{x} = (a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

Ist zusätzlich $n = 1$, also $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann besteht die Matrix (bzw. der Vektor) A nur aus einer Komponente: $A = (a_1)$. Wendet man A auf einen „Vektor“ $\bar{x} = (x_1)$ aus \mathbb{R} an, so erhält man $A\bar{x} = a_1 x_1$.

Für A bzw. \bar{x} schreiben wir dann einfach a_1 bzw. x_1 .

Diese Bezeichnungsweise ausnutzend liefert die zweite Definition der Differenzierbarkeit aus Kapitel 7, 7/1/10 folgende Formulierung:

f ist in $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar \iff

f ist in einer Umgebung $U(c)$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung

$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{o(x)}{|x - c|} \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$, so daß für jedes

$x \in U(c)$ gilt: $f(x) = f(c) + b \cdot (x - c) + o(x)$.

Diese Formulierung läßt sich sofort auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Elemente $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ erweitern.