

# Kapitel 8

## Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

### 8.1 Differenzierbarkeit

**Beispiel.**

8/1/6

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2y + 2y$ ,  $\bar{c} = (a, b)$ .

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = (f(x, b))'(a) = (2xb)(a) = 2ab.$$

Allgemein ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2y) = 2xy.$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 2y) = x^2 + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) = a^2 + 2.$$

Die Abbildung 8.1 zeigt die geometrische Veranschaulichung der partiellen Ableitungen für eine Funktion mit zwei Veränderlichen.

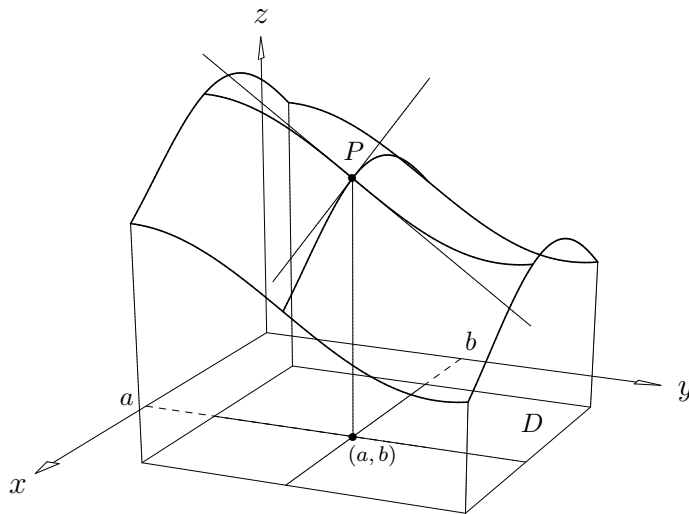


Abb. 8.1 Der Definitionsbereich der hier dargestellten Funktion  $f(x, y)$  ist ein Rechteck  $D$ . Schränkt man den Definitionsbereich auf  $\{(x, y) \in D : y = b\}$  bzw. auf  $\{(x, y) \in D : x = a\}$  ein, dann entstehen Kurven auf der Fläche  $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ . Die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  in  $(a, b)$  geben die Anstiege der Tangenten an diesen Kurven im Punkt  $(a, b)$  in Richtung der  $x$ -Achse bzw. der  $y$ -Achse an.

Die partielle Ableitung nach  $x_i$  gibt also den Anstieg der Tangente in Richtung der Achse  $x_i$  an. Wir werden diese Art der Ableitung noch einmal verallgemeinern zur sog. *Richtungsableitung*. Dazu geben wir uns (durch einen geeigneten Vektor) eine beliebige Richtung vor und betrachten den Anstieg der Tangente in diese Richtung, falls die zugrundegelegte Funktion dies zuläßt. Daraus ergibt sich folgende Definition.