

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/14

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann ist f in \bar{c} (total) differenzierbar, und für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i) + o(\bar{x})$.

(D.h., die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die aufgrund der Differenzierbarkeit existiert, ist gegeben durch $A = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ und $A(\bar{x} - \bar{c}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i)$.)

Beweis. Wir betrachten hier nur den Spezialfall $n = 3$. Dazu sei $\bar{x} = (x, y, z)$ und $\bar{c} = (a, b, c)$ (den allgemeinen Fall beweist man analog). 8/1/15

Mit Hilfe des 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (leicht modifiziert) erhält man

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= f(x, y, z) - f(a, b, c) = \\ &= f(x, y, z) - f(a, y, z) + f(a, y, z) - f(a, b, z) + f(a, b, z) - f(a, b, c) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{a + \vartheta_1(x - a)}_{:= \bar{u}}, y, z) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{a, b + \vartheta_2(y - a)}_{:= \bar{v}}, z) \cdot (y - b) + \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(\underbrace{a, b, c + \vartheta_3(z - c)}_{:= \bar{w}}) \cdot (z - c) = \quad \text{(nach dem 1. Mittelwertsatz)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{v}) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) \cdot (z - c) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z - c) + \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right] \cdot (x - a) + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \right] \cdot (z - c)}_{:= r(\bar{x})}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z - c) + r(\bar{x}).$$

Behauptung: $\frac{r(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$.

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, folglich gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes \bar{x} mit $|\bar{x} - \bar{c}| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\text{im allgemeinen Fall ist der Betrag } < \frac{\varepsilon}{n}).$$

Die obige Abschätzung gilt auch entsprechend für die partiellen Ableitungen nach y und nach z .

Offenbar gilt:

$$|\bar{x} - \bar{c}| < \delta \implies |\bar{u} - \bar{c}|, \dots, |\bar{w} - \bar{c}| < \delta,$$

denn $0 < \vartheta_i < 1$ für alle i .

Folglich ist erst recht

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \text{analog für } \bar{v} \text{ und } \bar{w}.$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |r(\bar{x})| &\leq \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|x - a|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} + \dots + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|z - c|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} \\ &\leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} \cdot |\bar{x} - \bar{c}| = \varepsilon \cdot |\bar{x} - \bar{c}|. \end{aligned}$$

Also

$$\frac{|r(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \leq \varepsilon \quad \text{für } 0 < |\bar{x} - \bar{c}| < \delta.$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square