Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.3 *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. **8/1/17**
Ist f *in* $\bar{c}$ *differenzierbar* (d.h., es gibt reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, so daß
$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x})$ für alle $\bar{x}$ in einer Umgebung $U(\bar{c})$),
dann existieren alle partiellen Ableitungen von f *in* $\bar{c}$, *und es ist* $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.
(Die Ableitung $f'(\bar{c}) := (a_1, \ldots, a_n)$ ist also durch die partiellen Ableitungen eindeutig bestimmt.)

Beweis. Nach Voraussetzung gilt **8/1/18**

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x})$$

auch speziell für

$$\bar{x} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) = \bar{c} + h\bar{e}_i \quad \text{mit} \quad h = x_i - c_i.$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c}) = a_i \cdot h + o(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i + \underbrace{\frac{o(\bar{x})}{h}}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

Damit existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i. \qquad ❏$$