Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Beispiel. **8/1/23**

Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle $\bar{c} = (1,1)$.
(vgl. Abb. 8.5; ein weiteres Beispiel für die Darstellung einer Funktion und der Tangentialebene an einer Stelle ist in den Abb. 8.6 a und 8.6 b gegeben.)

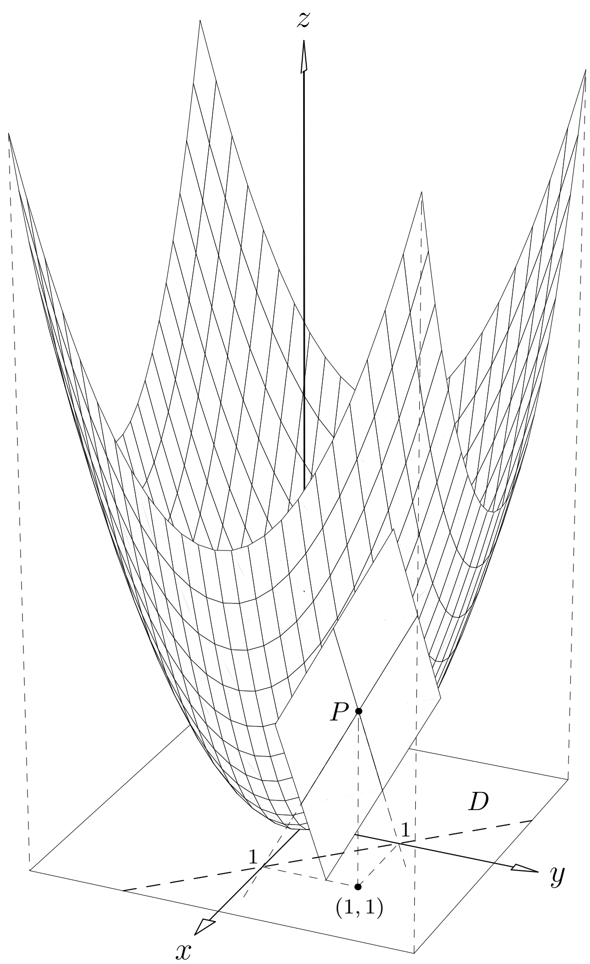

Abb. 8.5 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit dem Definitionsbereich $D := [-2,2] \times [-2,2]$ und der Tangentialebene an der Stelle $(1,1)$ bzw. im Punkt $P := (1,1,2)$. Das „Kreuz“ in der Tangentialebene entsteht durch die Tangenten an den entsprechenden Kurven im Punkt P in Richtung der Achsen. Die dicker gestrichelte Linie symbolisiert den Schnitt der Tangentialebene mit der durch D gegebenen Ebene.

Es ist

$$f(1,1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} z = t(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(y-1) \\ &= 2 + 2(x-1) + 2(y-1). \end{aligned}$$

Die Ebene geht durch die drei Punkte $(1,1,2), (1,0,0), (0,1,0)$, wodurch die Ebene schon eindeutig bestimmt ist.

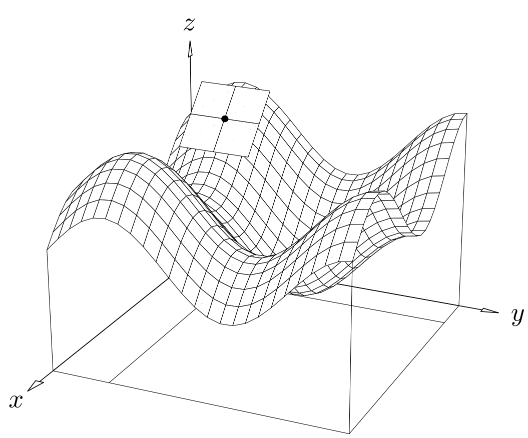

Abb. 8.6 a

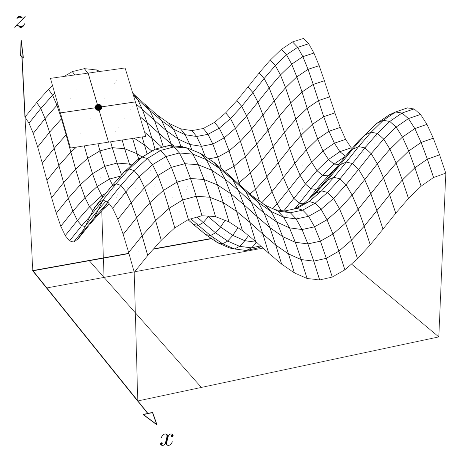

Abb. 8.6 b

In den Abbildungen ist die Funktion $f(x,y) = \cos x + \sin y + 3$ mit dem Definitionsbereich $D := [0, \frac{5}{2}\pi] \times [0, \frac{5}{2}\pi]$ aus zwei verschiedenen Perspektiven dargestellt. Die Tangentialebene wird an der Stelle $(\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ betrachtet.