

# Kapitel 8

## Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

### 8.1 Differenzierbarkeit

Beispiele.

#### (3) Transformation in Zylinderkoordinaten

8/1/35/4

Analog wie im Beispiel (2) werden jetzt räumliche Koordinaten transformiert.

Dazu sei  $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  ein Punkt im Raum  $\mathbb{R}^3$ , der mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit  $x$ ,  $y$  bzw.  $z$  bezeichnet werden. Dann ist der Punkt  $(a, b, c)$  eindeutig durch das Tripel  $(r, \varphi, c)$  darstellbar, wobei  $r$  und  $\varphi$  die Polarkoordinaten des Punktes  $(a, b)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  sind und  $c$  bei der Transformation unverändert bleibt.

Damit ist der gleiche Punkt  $P$  im Raum  $\mathbb{R}^3$  durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.9).

Die neuen Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Zylinderkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

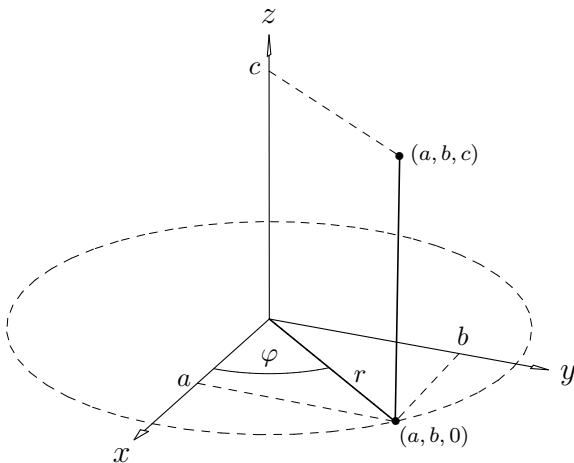


Abb. 8.9 Der Punkt  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  ist mit Hilfe von Zylinderkoordinaten dargestellt.  $r$  bezeichnet den Abstand zwischen  $\vec{0} := (0, 0, 0)$  und  $(a, b, 0)$ .

Der Punkt  $(a, b, c)$  besitzt die Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, c)$ , wobei  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten von  $(a, b)$  sind und  $c$  unverändert bleibt.

Es gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi, z),$$

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi, z),$$

$$c = c.$$

Betrachtet man den Punkt  $P$  als variabel,  $(a, b, c) := (x, y, z)$ , dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi, z) := (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), g_3(r, \varphi, z)) = (x, y, z),$$

also

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung der Funktion  $g$  ergibt sich wie folgt:

$$g'(r, \varphi, z) = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det \left( \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) \right) = r.$$

Für  $r \neq 0$  ist die Transformation injektiv.